Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

chap. VII : Réduction

— **Diagonalisabilité** d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme.

— Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$, inégalités $\boxed{1 \leq \dim(E_{\lambda,u}) \leq m_\lambda}$

[preuve pour les 5/2]

— **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé :
lorsque $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
lorsque $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.

— **C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples

les étudiants doivent connaître un contre-exemple tel $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— **Calcul des puissances** d'une matrice diagonalisable

— **Trigonalisabilité**,
Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
preuve non exigible
en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

— **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable

$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix}$ et relation $V_{n+1} = A \times V_n$

les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *avec* D *diagonale, lorsque* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

— Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque : $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0 u_n$
Les étudiants doivent savoir expliciter sur un exemple une écriture matricielle $V_{n+1} = AV_n$ avec $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+\ell-1} \end{pmatrix}$ de la relation de récurrence.

— Rappels et compléments sur les récurrences linéaires d'ordre 2 à coefficients constants, vues en PCSI

ch. VI : Equations différentielles, systèmes différentiels

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** à coefficients constants, avec second membre continu :
$y' = a\ y + b(t)$ (rappel de PCSI)

— **Equation différentielle linéaire d'ordre 1** avec second membre, à coefficients continus : $y' = a(t)\ y + b(t)$ (rappel de PCSI) Pour $a : I \to \mathbb{K}$ continue, détermination des solutions sur I de $(H)\quad y' = a(t)y$ **[preuve]**

— **Equations différentielles linéaires d'ordre 2** à coefficients constants $ay'' + by' + cy = 0$, avec $a, b, c \in \mathbb{K}$

— **Système différentiel linéaire** à coefficients constants, sans second membre :

$$X'(t) = A\ X(t)$$

Résolution dans le **cas diagonal**

$$Z' = D\ Z$$

puis dans le **cas diagonalisable**, en posant $A = PDP^{-1}$ et $Z : t \longmapsto P^{-1}X(t)$

— **Ecriture des solutions réelles** d'uns système différentiel $X' = AX$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

— Système différentiel linéaire (à coefficients continus) :
$X' = A(t)X + B(t)$

— *à venir : problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz général, théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire*

N.B. pour les colleurs : pas d'interrogations orales la semaine du 13/12 (forum des écoles le vendredi)

N.B. pour les colleurs du vendredi 07/01/2022 : en raison d'une conférence, un décalage de 30 minutes est à prévoir l'après-midi