Préliminaires : matrices de Kac de taille $n+1$

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n, On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

On admet que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et que :

$$\mathrm{Ker}(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

Dans ce problème, on donne une application probabiliste de l'étude de la matrice A_n.

Exercice de probabilités

Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.

À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. les choix successifs sont supposés indépendants.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.

Exemple : supposons $n=4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées $1, 3, 4$ et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0,n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'événement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

Q1. Pour $k \in \mathbb{N}$, que peut-on dire de la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$?

Q2. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?

Q3. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0, n]\!]$, déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}).$$

On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q4. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Q5. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0$$

On suppose jusqu'à la fin qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2.

Q6. Déterminer la loi π de N_0.

Q7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0. *On pourra utiliser le résultat admis en préliminaires.*

Q8. Démontrer que π est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π, alors toutes les variables N_k suivent la loi π.

Correction. CCINP PSI 2020 : Les matrices de Kac

Q31. Soit $k \in \mathbb{N}$. À l'étape k, l'urne U_1 contient 0, 1, 2, $\dots$, n boules et ces "ou" sont exclusifs. Ainsi,

$$\boxed{(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n}) \text{ est un système complet d'événements}}$$

Q32. ▶ Si $j = 0$, il n'y a pas de boule dans l'urne U_1 donc la boule tirée le sera dans U_2 et passera dans U_1 de sorte que l'on aura $j = 1$ à l'étape suivante.

▶ Si $j = n$, toutes les boules sont dans l'urne U_1 donc la boule tirée passera dans U_2 et on aura $j = n - 1$ à l'étape suivante.

▶ Si $j \in [\![1, n-1]\!]$ alors l'urne U_1 va recevoir ou perdre une boule donc $j = j \pm 1$.

$$\boxed{0 \to 1 \qquad n \to n-1 \qquad j \to j \pm 1}$$

Q33. ▶ Si $j = 0$. Le seul moyen de se retrouver sans boule dans l'urne U_1 à l'étape $k+1$ c'est qu'avant, il y en avait une seule ($l = 1$) et qu'elle a été tirée. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,0}) = 0 \text{ si } l \neq 1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,1}}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}}$$

puisque si à l'étape k, U_1 contient une seule boule, il y a une chance sur n qu'elle soit choisie puisque l'on tire uniformément.

▶ Si $j = n$. Le seul moyen de se retrouver avec toutes les boules dans l'urne U_1 à l'étape $k+1$ c'est qu'avant, il y en avait $n-1$ ($l = n-1$) et que celle de U_2 a été tirée. Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,n}) = 0 \text{ si } l \neq n-1 \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,n-1}}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}}$$

▶ Si $j \in [\![1, n-1]\!]$, puisque l'on peut avoir une boule en plus ou une boule en moins, $\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0$ si $l \neq j \pm 1$. Puis, si $l = j - 1$, il faut tirer une boule de U_2 (qui en contient $n - (j-1) = n - j + 1$) pour en ajouter une dans U_1 et ceci se fait avec probabilité $\dfrac{n-j+1}{n}$. De même, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}) = 0 \text{ si } l \neq j \pm 1 \quad \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n} \text{ et } \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j}) = \frac{j+1}{n}}$$

Q34. ▶ Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $(E_{k,0}, E_{k,1}, \dots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \sum_{l=0}^{n} \underbrace{\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j})}_{=0 \text{ si } l \neq j \pm 1} \mathbb{P}(E_{k,l}) = \mathbb{P}_{E_{k,j-1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \mathbb{P}_{E_{k,j+1}}(E_{k+1,j})\mathbb{P}(E_{k,j+1})$$

ce qui, avec la question précédente donne bien

$$\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1})}$$

Pareillement, on obtient

$$\boxed{\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})}$$

Q35. La question précédente, interprétée avec les vecteurs Z_k donne $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$ et donc, par une récurrence immédiate,

$$\boxed{Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0}$$

Q36. Pour chaque boule j avec $j \in [\![1, n]\!]$, on note X_j la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si elle se trouve au départ dans U_1 et 0 sinon. Alors $N_0 = X_1 + \cdots + X_n$ (nombre total de boules dans U_1).
Comme on suppose que les affectations des boules se font indépendamment et équiprobablement, les X_j sont indépendantes et de paramètre $\dfrac{1}{2}$. On sait alors que N_0 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/2)$ de sorte que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{P}(N_0 = k) = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}$:

$$\boxed{\pi = \frac{1}{2^n}\left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![0,n]\!]}}$$

Q37. D'après la question **Q30**, π est un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n donc $\dfrac{1}{n} A_n \pi = \pi$. Mais on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_{k+1} = \dfrac{1}{n} A_n Z_k$. Comme $Z_0 = \pi$, on a bien pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Z_k = \pi$ donc

$$\boxed{N_k \text{ a la même loi que } N_0}$$

Q38. Un sens vient d'être fait. Réciproquement, supposons qu'il existe π' une loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π', alors toutes les variables N_k suivent la loi π'.
On a donc $Z_0 = \pi'$ et $Z_1 = \pi'$ donc $\dfrac{1}{n} A_n \pi' = \pi'$ donc $\pi' \in \operatorname{Ker}(A_n - nI_{n+1})$. D'après la question **Q30**, cet espace est de dimension 1 et engendré par π donc il existe un réel α tel que $\pi' = \alpha\pi$.
Mais π et π' sont des lois de probabilité donc la somme de leurs coordonnées vaut 1. On a donc

$$1 = \sum_{j=0}^{n} \pi'_j = \sum_{j=0}^{n} \alpha\pi_j = \alpha \sum_{j=0}^{n} \pi_j = \alpha$$

Ainsi, $\alpha = 1$ donc $\pi' = \pi$. On a donc bien montré que

$$\boxed{\pi \text{ est l'unique loi de probabilité telle que : si } N_0 \text{ suit la loi } \pi, \text{ alors toutes les variables } N_k \text{ suivent la loi } \pi}$$