Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Probabilités discrètes, variables aléatoires

— Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes*pas d'exercice sur ces notions, méthodes et résultats admis du programme PC*

— Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.

— **Ecritures ensemblistes** dévènements à l'aide de $\bigcap$ (ET) ou à l'aide de $\bigcup$ (OU)

— Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$. ($\sigma$-additivité)

— **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.

— Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$

— **Formule des probabilités composées** $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$

— **Système complet (dénombrable) d'évènements** si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$
système quasi-complet.

— **Formule des probabilités totales** Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)$.

— **Formule de Bayes** $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \ \mathbf{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\, \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)}$.

— Variable aléatoire discrète.
Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Variable aléatoire discrète X, loi $\mathbb{P}_X$.
Notations
$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X = k] = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}\right)$

Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{Unif([\![1,N]\!]),\ b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable aléatoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.

— **Espérance** :
$\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X = x])$ sommable.
En pratique, X v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n\mathbb{P}[X = x_n]$ est ACV, et $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}[X = x_n]$.

— Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = \lambda$. **[preuve]**

— Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$. **[preuve ⋆]**

— **linéarité** de l'espérance. Si X admet une espérance et est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X]$

— Théorème de **Transfert** :
$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X = x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.

— **Espérance d'un produit** de deux variables aléatoires **indépendantes**.

— propriétés de l'espérance : **positivité**, **croissance**.

— Définition.
En pratique, X v.a. discrète admet une variance lorsque $\mathbb{E}[X^2]$ existe et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.
$\mathbb{V}[aX + b] = a^2\mathbb{V}[X]$ **[preuve]**

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

ch. VII : Réduction

— **Trigonalisabilité**,
Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
preuve non exigible
en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

— **Systèmes de suites récurrentes linéaires** à coefficients constants, cas diagonalisable

$V_n = \begin{pmatrix} v_{n,1} \\ \vdots \\ v_{n,p} \end{pmatrix}$ et relation $V_{n+1} = A \times V_n$

les étudiants doivent savoir en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, *avec* D *diagonale, lorsque* $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ *est diagonalisable.*

— Suites récurrentes linéaires à coefficients constants d'ordre quelconque : $u_{n+\ell} = a_{\ell-1}u_{n+\ell-1} + \cdots + a_0u_n$
Les étudiants peuvent avoir à expliciter sur un exemple une écriture matricielle $V_{n+1} = AV_n$ *avec* $V_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+\ell-1} \end{pmatrix}$ *de la relation de récurrence.*

à venir : variance d'une somme, covariance, corrélation

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.