Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Equations différentielles, systèmes différentiels

— **Système différentiel linéaire** à coefficients constants, sans second membre : $X'(t) = A\ X(t)$
Résolution dans le **cas diagonal** $Z' = D\ Z$, puis dans le **cas diagonalisable**, en posant $A = PDP^{-1}$ et $Z = P^{-1}X$
Ecriture des solutions réelles à l'aide des parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

— Système différentiel linéaire (à coefficients continus) : $X' = A(t)X + B(t)$

Problème de Cauchy $\boxed{(\mathcal{PC}) \left\{ \begin{array}{lcll} X'(t) & = & A(t)\ X(t) + B(t) & (\mathcal{E}) \\ X(t_0) & = & X_0 & (\mathcal{CI}) \end{array} \right.}$

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, preuve H.P.). principe de superposition.

— Résolution explicite d'un problème de Cauchy avec A constante et $B(t) = 0$: écriture de l'unique solution dans le cas linéaire diagonal, ou dans le cas **diagonalisable**.
Cas de Système différentiel linéaire trigonalisable à coefficients constants $X' = AX$, avec A trigonalisable (sans second membre).

— **Structure de $\mathbb{K}$-e.v. de dimension** 2 de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme : $(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$, avec a, b, c, d continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$
(N.B. pour les colleurs : la méthode de Lagrange pour en déterminer explicitement une base est Hors Programme)

ch. IX : Espaces probabilisés, variables aléatoires.

— Ensemble fini, ensemble (infini) dénombrable (s'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ vers cet ensemble). Ex : $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$.

— Complémentaire, union, intersection de parties de Ω.
Tribu $\mathcal{A}$ sur un ensemble dénombrable Ω (fini ou infini) : ensemble contenant Ω, stable par passage au complémentaire et par réunion infinie. Évènement d'une tribu.
Evènements incompatibles : si l'intersection est vide.

— **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que :
i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

— Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.

— Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ **[preuve]**

— **Formule des probabilités composées** **[preuve]** :
si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$

— **Système complet (dénombrable) d'évènements**
si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

— **Formule des probabilités totales** **[preuve⋆]**
Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$,
alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$.

— **Formule de Bayes** **[preuve]** : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)}.$$

— Variable aléatoire discrète.
Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N, p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Théorème d'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$, pour toutes suites $(p_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et les $x_i,\ i \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts.

— **Propriété de continuité croissante** :
si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$,
alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Propriété de continuité décroissante** :
si $(A_n)_{n \geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$,
alors $\lim_{n \to +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

— **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.