Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VII : Espaces probabilisés, variables aléatoires.

— **Formule de Bayes** **[preuve]** :
— Variable aléatoire discrète.
Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$b(p)$, $\mathcal{B}(N,p)$, $\mathcal{G}(p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.
— Théorème d'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$, pour toutes suites $(p_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et les $x_i,\ i \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts.
— **Propriété de continuité croissante** :
si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
— **Propriété de continuité décroissante** :
si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
— Propriété de sous-additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

ch. VIII : Séries entières

I) **Séries entières de la variable complexe.**
— Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
— **Rayon de convergence** :
$R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
Somme d'une série entière.
Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0,R)$.
Comparaison de rayons de convergence.
Détermination pratique du rayon de convergence (*la seule règle de d'Alembert au programme concerne les séries numériques, tout autre méthode nécessite une justification*).

— **série entière géométrique** $\sum z^n$,
série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$

II) **Séries entières de la variable réelle.**
— Série entière d'une variable réelle.
Ouvert de convergence $]-R,R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R,R[$.

— **Continuité de la somme** d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R,R[$.

— **Intégration terme à terme**.
Dérivation terme à terme.
— **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :
$\boxed{t \mapsto \ln(1-t),\ t \mapsto \frac{1}{1-t},\ t \mapsto \ln(1+t),\ t \mapsto \text{Arctan}(t)}$
$\boxed{\exp,\ \text{ch},\ \text{sh},\ \cos,\ \sin}$
— Fonction développable en série entière.
Unicité du développement en série entière. Série de Taylor.
Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
— DSE via une équation différentielle :
DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
— Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
— Propriétés avancées des séries entières de la variable complexe.
— Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.

à venir : produits scalaires, espaces euclidiens