Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VIII : Probabilités discrètes, variables aléatoires

— Variable aléatoire discrète.
Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Variable aléatoire discrète X, loi $\mathbb{P}_X$.
Notations
$\mathbb{P}_X(\{k\}) = \mathbb{P}[X=k] = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega)=k\}\right)$

Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{Unif(\llbracket 1,N \rrbracket),\ b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X=k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.

— Notation $X \sim Y$ lorsque X et Y ont même loi.

— Variable aléatoire image $Y = f(X)$ avec $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : R \to \mathbb{R}$.

— **Espérance** :
$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X=x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X=x])$ sommable.
En pratique, X v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \mathbb{P}[X=x_n]$ est ACV, et $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}[X=x_n]$.

— Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $\mathbb{E}[X] = \lambda$. **[preuve]**

— Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$. **[preuve ⋆]**

— **linéarité** de l'espérance. Si X admet une espérance et est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[X \geq n]$

— Théorème de **Transfert** :
$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X=x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.

— **Espérance d'un produit** de deux variables aléatoires **indépendantes**.

— propriétés de l'espérance : **positivité**, **croissance**.

— **Variance.**
En pratique, X v.a. discrète admet une variance lorsque $\mathbb{E}[X^2]$ existe et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.
$\mathbb{V}[aX+b] = a^2\mathbb{V}[X]$ **[preuve]**

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjoint** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2Cov(X,Y)$

— Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$ **[preuve ⋆]**

— Variance d'une somme.

— **Coefficient de corrélation** $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.

— interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

— Indépendance (mutuelle) d'une suite de variables aléatoires.

— lemme des coalitions.

à venir : espaces euclidiens

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr
T7 : Enora, Camille G.