Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS. **Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques [preuves⋆] signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.**

ch. VIII : Equations différentielles, systèmes différentiels

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (admis, preuve H.P.) : existence d'une unique solution d'un problème de Cauchy linéaire du type (PC) lorsque les applications A et B sont continues.
Principe de superposition.
Résolution explicite d'un problème de Cauchy avec A constante et $B(t) = 0$: écriture de l'unique solution dans le cas linéaire diagonal, ou dans le cas **diagonalisable**.

Structure de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme : $(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = d(t)$, avec a, b, c, d continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$
Structure de $\mathbb{K}$-e.v. de dimension 2 de l'ensemble des solutions des équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients continus, de la forme :

$$(E) \quad a(t)y'' + b(t)y' + c(t) = 0$$

avec a, b, c continues sur I et $a(t) \neq 0,\ \forall t \in I$

ch. IX : Espaces probabilisés, variables aléatoires.

- **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ telle que : i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.
- Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.
- Formule $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ **[preuve]**
- $\boxed{\textbf{Formule des probabilités composées}}$ **[preuve]** : si $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$, alors $\mathbf{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1\cap A_2}(A_3) \times \cdots \times \mathbf{P}_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$
- **Système complet (dénombrable) d'évènements** si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ et, $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$
- $\boxed{\textbf{Formule des probabilités totales}}$ **[preuve⋆]**
Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)$.
- $\boxed{\textbf{Formule de Bayes}}$ **[preuve]** : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$ et $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_B(A_k) = \dfrac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\, \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\, \mathbf{P}(A_n)}$.
- Variable aléatoire discrète.
Variables aléatoires suivant une loi usuelle :
$\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{G}(p),\ \mathcal{P}(\lambda)}$
les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.
- Théorème d'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$, pour toutes suites $(p_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et les $x_i,\ i \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts.
- **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
- **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N},\ A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
- **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n)$.

ch. X : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
   - **Rayon de convergence** :
     $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
     Somme d'une série entière.
     Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0, R)$.
     Comparaison de rayons de convergence.
     Détermination pratique du rayon de convergence (*la seule règle de d'Alembert au programme concerne les séries numériques, tout autre méthode nécessite une justification*).
   - **série entière géométrique** $\sum z^n$,
     série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$
2. **Séries entières de la variable réelle.**
   - Série entière d'une variable réelle.
     Ouvert de convergence $]-R, R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$.
   - **Continuité de la somme** d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$.
   - **Intégration terme à terme**.
     Dérivation terme à terme.

à venir : DSE usuels, résolution d'équations différentielles, somme de deux séries entières, Produit de Cauchy