

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS. Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
- Quelques [preuves*] signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IX : Espaces probabilisés, variables aléatoires.

- **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :
 - i) $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
 - ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements incompatibles,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$
- Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 événements** ; famille d'événements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.
- Formule $\mathbf{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$ [preuve]
- **Formule des probabilités composées** [preuve] : si $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, alors

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$
- **Système complet (dénombrable) d'évènements**

$$\text{si : } \Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \text{ et, } \forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$$
- **Formule des probabilités totales** [preuve*]

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, avec $\mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i$,

alors
$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B) \mathbf{P}(A_n).$$
- **Formule de Bayes** [preuve] : $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, et B un évènement tel que

$$\mathbf{P}(B) > 0 \text{ et } \mathbf{P}(A_i) > 0, \forall i, \text{ alors } \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

$$\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B) \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B) \mathbf{P}(A_n)}.$$

- Variable aléatoire discrète.
- **Variables aléatoires suivant une loi usuelle** : $b(p), \mathcal{B}(N, p), \mathcal{G}(p), \mathcal{P}(\lambda)$
 les étudiants doivent connaître les images $X(\Omega)$ les valeurs de $\mathbf{P}(X = k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et si possible une expérience aléatoire associée.
- Théorème d'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ tel que $\mathbf{P}(X = x_n) = p_n$, pour toutes suites $(p_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ et $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que : $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$ et les $x_i, i \in \mathbb{N}$ sont deux à deux distincts.
- **Propriété de continuité croissante** : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$
- **Propriété de continuité décroissante** : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$
- **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements, alors
$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

ch. XII : Séries entières

1. Séries entières de la variable complexe.

- Série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
- **Rayon de convergence** : $R = \sup\{r \geq 0; (|a_n| r^n)_n \text{ bornée}\}$. Somme d'une série entière. Détermination pratique du rayon de convergence (la seule règle de d'Alembert au programme concerne les séries numériques, tout autre méthode nécessite une justification).
- **série entière géométrique** $\sum z^n$, **série entière exponentielle** $\sum \frac{1}{n!} z^n$

2. Séries entières de la variable réelle.

- Série entière d'une variable réelle. **Ouvret de convergence**] - R, R[. Convergence normale sur tout segment de] - R, R[.
- **Continuité de la somme** d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence] - R, R[.
- **Intégration terme à terme. Dérivation terme à terme.**
- **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :

$t \mapsto \ln(1 - t), t \mapsto \frac{1}{1 - t}, t \mapsto \ln(1 + t), t \mapsto \text{Arctan}(t)$
$\exp, \text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin$

N.B. pour les colleurs :

Les propriétés de comparaisons de rayon de convergence, produits de Cauchy, lemme d'Abel, et les techniques de résolution autour des équations différentielles seront au programme ultérieurement.