ch. VIII : Réduction

- Eléments propres, polynôme caractéristique, formules pour les multiplicités, les dimensions des sous-espaces propres, trace, rang.
- **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité** pour un polynôme caractéristique scindé. Sont équivalentes, **lorsque χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$** :
  i) A diagonalisable sur $\mathbb{K}$
  ii) $E = \bigoplus E_{\lambda,u}$,
  iii) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u), \dim(E_{\lambda,u}) = m_\lambda$.
- **Théorème de C.S. de diagonalisabilité** lorsque le polynôme caractéristique est scindé à racines simples :
- **Théorème de C.N.S. de diagonalisabilité via un polynôme annulateur** Sont équivalentes :
  i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ ii) il existe un polynôme annulateur P de A **scindé et à racines simples**
- **Trigonalisabilité**,

  Théorème de C.N.S. de trigonalisabilité : lorsque le polynôme caractéristique est scindé
  preuve non exigible
  en particulier, toute matrice carrée est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

  programme PC : « La technique générale de trigonalisation n'est pas au programme. On se limite dans la pratique à des exemples simples en petite dimension et tout exercice de trigonalisation effective doit comporter une indication. »

- *N.B. les étudiants ont vu en exercice des exemples de systèmes de systèmes linéaires via une relation $V_{n+1} = A \times V_n$;*
  ainsi que des exemples de suites récurrentes linéaires à coefficients constants, dans le cas diagonalisable
  les étudiants doivent avoir compris la méthode pour en déduire une formule de la forme $V_n = PD^nP^{-1}V_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, avec D diagonale, lorsque $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est diagonalisable.

ch. IX : Espaces vectoriels normés

- **Norme** sur une e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$.
- **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.
- Définition (formules) des **normes usuelles $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$, $\|\ \|_\infty$** sur $E = \mathbb{R}^n$.
- **Partie bornée** de $(E, \|\ \|_E)$.
- **Suite bornée** $(V_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de $(E, \|\ \|_E)$.
- **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, de Δ partie de $(E, \|\ \|_E)$ vers $(F, \|\ \|_F)$.
- exemple $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- Produit scalaire, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.
- exemple $M \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(M^TM)}$ sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].

  [niveau ⋆] justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles.
  [pour tous] : (V_n) converge vers dans E ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$

TRES BONNES FETES DE FIN D'ANNEE

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine