

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves\*]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

## ch. X : Séries entières

### 1. Séries entières de la variable complexe.

- Série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
- **Rayon de convergence** :  
 $R = \sup\{r \geq 0; (|a_n| r^n)_n \text{ bornée}\}$ .  
Somme d'une série entière.  
Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence  $D(0, R)$ .  
Comparaison de rayons de convergence.  
Détermination pratique du rayon de convergence (*la seule règle de d'Alembert au programme concerne les séries numériques, tout autre méthode nécessite une justification*).

- série entière géométrique  $\sum z^n$ ,
- série entière exponentielle  $\sum \frac{1}{n!} z^n$

### 2. Séries entières de la variable réelle.

- Série entière d'une variable réelle.  
**Ouvert de convergence**  $] -R, R[$ . Convergence normale sur tout segment de  $] -R, R[$ .
- **Continuité de la somme** d'une série entière réelle  $\sum a_n x^n$  sur l'ouvert de convergence  $] -R, R[$ .

- **Intégration terme à terme.**
- **Dérivation terme à terme.**
- **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :

$$t \mapsto \ln(1-t), t \mapsto \frac{1}{1-t}, t \mapsto \ln(1+t), t \mapsto \text{Arctan}(t)$$

$$\exp, \text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin$$

### 3. Fonction développable en série entière.

**Unicité du développement en série entière.** Série de Taylor.  
Toute fonction développable en série entière sur un intervalle  $] -R, R[$  y est égale à la somme de sa série de Taylor.

### 4. DSE via une équation différentielle :

$$\text{DSE de } t \mapsto (1+t)^\alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}.$$

*pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle*

### 5. Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.

### 6. somme de deux séries entières, Produit de Cauchy

*à venir : endomorphismes symétriques, isométries*