Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. X : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**

— Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.

— **Rayon de convergence** : $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
Somme d'une série entière.
Détermination pratique du rayon de convergence (*la seule règle de d'Alembert au programme concerne les séries numériques, tout autre méthode nécessite une justification*).

— **série entière géométrique** $\sum z^n$,
série entière exponentielle $\sum \frac{1}{n!} z^n$

2. **Séries entières de la variable réelle.**

— Série entière d'une variable réelle.
Ouvert de convergence $]-R, R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$.

— **Continuité de la somme** d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$.

— **Intégration terme à terme**.
Dérivation terme à terme.

— **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :

$\boxed{t \mapsto \ln(1-t),\ t \mapsto \frac{1}{1-t},\ t \mapsto \ln(1+t),\ t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)}$

$\boxed{\exp,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh},\ \cos,\ \sin}$

$\boxed{t \mapsto (1+t)^\alpha}$

— Fonction développable en série entière. **Unicité** du développement en série entière. Série de Taylor.
Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.

— DSE via une équation différentielle :
DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle

(a) Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0, R)$.

Comparaison de rayons de convergence.

(b) Somme de deux séries entières, rayon de convergence. **Produit de Cauchy ;**

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

Norme, **produit scalaire**, dans un espace euclidien. Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire.

Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une telle base.

Algorithme de Gram-Schmidt. **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. . Orthogonal d'un s.e.v.. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, somme directe orthogonale $\boxed{F \oplus^\perp F^\perp = E}$.