

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves*]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. VII : Séries entières

1. Séries entières de la variable complexe.

- Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
- Produit de Cauchy de deux séries entières.

2. Séries entières de la variable réelle.

- **Ouvert de convergence**] - R, R[.
- **Convergence normale sur tout segment** de l'ouvert de convergence d'une série entière réelle. **[preuve*]**
- Continuité de la somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence] - R, R[.
- **Primitivation terme à terme** sur l'ouvert de convergence.
- **Dérivation terme à terme** sur l'ouvert de convergence.
- **Dérivations successives terme à terme** sur l'ouvert de convergence : La fonction somme $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe C^∞ sur l'ouvert de convergence] - R, R[et :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in] - R, R[, S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$

- Fonction développable en série entière.
- **Unicité du développement en série entière** :

$$\text{Si } S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \text{ est définie sur un intervalle ouvert non vide contenant 0, nécessairement, } \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

lien avec les développements limités (série de Taylor).

- **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) : $t \mapsto \ln(1-t)$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto \text{Arctan}(t)$, exp, ch, sh, cos, sin, $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

ch. VIII : Probabilités discrètes

- Dénombrabilités, sommabilité d'une famille discrète. Propriétés sur les familles sommables : croissance, linéarité, sommation par paquets, Fubini, produits de sommes *pas d'exercice sur ces notions, méthodes et résultats admis du programme PC*
- Univers, évènement contraire, réunion dénombrable. Tribu des évènements, espace probabilisable.
- **Écritures ensemblistes** d'évènements à l'aide de $\cap$ (ET) ou à l'aide de $\cup$ (OU)
- Loi de **Probabilité** sur Ω muni d'une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$: application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ telle que :
i) $P(\Omega) = 1$; ii) pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'évènements incompatibles, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. (σ -additivité)

- **Continuité croissante** : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1}$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
- **Continuité décroissante** : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est 1 suite d'év. t.q. , $\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.
- **Propriété de sous-additivité** : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements, alors $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Probabilité conditionnelle. **Indépendance de 2 évènements** ; famille d'évènements 2 à 2 indépendants, **mutuellement indépendants**.
- Formule $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- **Formule des probabilités composées** $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$, alors $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$
- **Système complet (dénombrable) d'évènements** si : $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et, $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$ système quasi-complet.
- **Formule des probabilités totales** Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, avec $P(A_i) > 0, \forall i$, alors $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n)$.
- **Formule de Bayes** $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, et B un évènement tel que $P(B) > 0$ et $P(A_i) > 0, \forall i$, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, P_B(A_k) = \frac{P_{A_k}(B) P(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B) P(A_n)}$.
- En cas d'évènements **incompatibles**, on calcule $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum P(A_n)$ avec des familles finies ou dénombrables
- En cas d'évènements **indépendants**, on calcule $P(\cap A_n) = \prod P(A_n)$ avec des familles finies ; dans le cas général, c'est la formule des probabilités composées qui s'applique
- Pour $p \in]0, 1[$, la **loi géométrique $\mathcal{G}(p)$** est la loi P sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$, définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(\{k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

Cette loi représente la loi de l'obtention d'un premier succès lors de la répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même loi de succès $b(p)$.

à venir : chapitre 9 : Intégrales à paramètre.

N.B. pour les interrogatrices ou interrogateurs : il n'y a pas de théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires d'ordre p , ni de méthode de Lagrange pour l'ordre 2, ni de résultat pour les systèmes différentiels linéaires en lien avec la réduction

Liste (en construction) **[préparation avancée ✖]** :

Leïna T1,
Erell T3,
Arthus (5/2) T4 ,
Manu (5/2) T5,
Gwendal T6, Louis (5/2) T6,
Ollie (5/2) T8