Révisions de PCSI

- **Théorème fondamental** du calcul intégral
- Quantification avec ε de la continuité en x_0 de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Continuité, dérivabilité, classe $\mathcal{C}^1$ d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, où a, b sont deux réels avec $a < b$.
- Notion d'**endomorphisme** : application linéaire d'un $\mathbb{K}$-e.v. vers lui-même.

ch. IX : Espaces vectoriels normés

- **Norme** sur un e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$.
- **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.
- Définition (formules) des **normes usuelles** $\| \|_1$, $\| \|_2$, $\| \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^n$.
- **Partie bornée** de $(E, \| \|_E)$.
- **Suite bornée** $(V_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de $(E, \| \|_E)$.
- **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, deΔ partie de $(E, \| \|_E)$ vers $(F, \| \|_F)$.
- exemple $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
- **Produit scalaire**, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.
- exemple $M \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$ sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].

  [niveau ⋆] justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles.

  [pour tous] : (V_n) converge vers dans E ssi :
  $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$

ch. X : Limites et continuité des fonctions

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

- **Boules ouvertes, boules fermées**
- **Point adhérent**
- **Limite d'une fonction** en un point adhérent
  Critère séquentiel.
- **continuité d'une fonction** de deux variables.
- **Partie fermée**
- **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné.
- **Partie ouverte**
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) \geq 0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue.
- point intérieur, **Intérieur Δ°** d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
- **adhérence $\overline{\Delta}$** d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
- Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie ; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie
- L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
- Partie dense.
- Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$.

N.B. pour les interrogateurs : on n'hésitera pas à faire représenter graphiquement des ensembles de $\mathbb{R}^2$ donnés par des équations ou inéquations cartésiennes. On guidera les étudiants si besoin pour toutes les questions topologiques.

TRES BONNES FETES DE FIN D'ANNEE

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau $\star$]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau $\star$]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine