Exercice 1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $(P_0(X) = 1, P_1(X) = X, ..., P_n(X) = X^n)$ la base canonique de E. Soit $(a_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ une famille de réels distincts deux à deux.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose : $(P|Q) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j)Q(a_j)$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

2. Soit P un polynôme de E, calculer $(P|P_0)$.

3. Pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on considère le polynôme $L_j(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$.

3.1. Démontrer que, pour tout couple $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$, $L_j(a_i) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

3.2. Prouver que la famille $\mathscr{B} = (L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une famille orthogonale pour le produit scalaire $(\,|\,)$.

3.3. En déduire que $\mathscr{B}$ est une base de E et qu'elle est orthonormale.

3.4. Déterminer les composantes d'un polynôme P de E dans la base $\mathscr{B}$.

3.5. Déterminer $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} L_j$.

4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(a_j) = 0$.

4.1. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.

4.2. Déterminer $H^\perp$ et en déduire la dimension de H.

5. Soit Q un polynôme de E.

5.1. Déterminer le projeté orthogonal de Q sur $H^\perp$.

5.2. Déterminer la distance de Q au sous-espace vectoriel H.