Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IX : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
   - **série entière géométrique** $\sum z^n$,
   - **série entière exponentielle** $\sum \frac{1}{n!} z^n$
   - Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0, R)$.
   - **Rayon de convergence** : $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
   - Somme d'une série entière.
   - **règle de d'Alembert des séries entières**.
   - $R\left(\sum a_n x^n\right) = R\left(\sum n a_n x^n\right)$ **[preuve ⋆]**
   - Comparaison de rayons de convergence avec O ou $\sim$.
   - Rayon de convergence de la somme de deux séries entières,
2. **Séries entières de la variable réelle.**
   - Série entière d'une variable réelle. Intervalle **ouvert de convergence** $]-R, R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$.
   - Convergence normale d'une série entière de la variable réelle sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence. **[preuve ⋆]**
   - Continuité de la somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$.
   - **Dérivation terme à terme des séries entières**
     La fonction somme $S : t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert de convergence $]-R, R[$ et :
     $$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall t \in]-R, R[,\ S^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}$$
   - Fonction développable en série entière.
   - **Unicité du développement en série entière** lien avec les développements limités.
   - **Primitivation terme à terme** de la somme d'une série entière sur l'ouvert de convergence.
   - $\boxed{\textbf{D.S.E. usuels}}$ (et rayons de convergence) : $\boxed{t \mapsto \ln(1-t),\ t \mapsto \frac{1}{1-t},\ t \mapsto \ln(1+t)}$, $\boxed{t \mapsto \text{Arctan}(t)}$, $\boxed{\exp,\ \text{ch},\ \text{sh},\ \cos,\ \sin}$
3. Fonction développable en série entière.
   - **Unicité du développement en série entière**
     Série de Taylor. Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
   - DSE via une équation différentielle :
     $\boxed{\textbf{DSE de } t \mapsto (1+t)^\alpha \text{ pour } \alpha \in \mathbb{R}.}$
     pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
   - **Produit de Cauchy** de deux séries entières, rayon de convergence.
   - Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise).

ch. XI : Espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

- **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** à un produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
  Algorithme de Gram-Schmidt.
- **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. .
- **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
  Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F + F^\perp$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F \oplus^\perp F^\perp = E}$.

à venir : isométries, théorème spectral