Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. X : Séries entières

1. **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :
   $t \mapsto \ln(1-t)$, $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto \text{Arctan}(t)$
   $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$
2. Fonction développable en série entière.
   Unicité du développement en série entière. Série de Taylor.
   Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
3. DSE via une équation différentielle :
   DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
   pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
4. Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
5. somme de deux séries entières, Produit de Cauchy

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

Norme, produit scalaire, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. Norme associée à un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire. **Base orthonormée** et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une telle base. Algorithme de Gram-Schmidt. Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. . Orthogonal d'un s.e.v., Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, somme directe orthogonale $\boxed{F \oplus^\perp F^\perp = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \; ; \; \forall x \in E, \; \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**

Conservation du produit scalaire par une isométrie. **[preuve ⋆]**

— **Image d'une (de toute) base orthonormale** par une isométrie.

— Stabilité de $F^\perp$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

— **Réflexion** dans un espace euclidien. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$:
$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}}$$

— Matrice orthogonale, inverse. On appelle indifféremment **isométrie** ou **automorphisme orthogonal** les éléments de $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes qui conservent la norme.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale.

— L'ensemble des isométries est non vide, stable par composition et par passage à l'inverse.
Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\text{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire. Ecriture complexe

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

à venir : Classification des isométries (vectorielles) du plan , endomorphismes symétriques