

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques [preuves] signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

Norme, produit scalaire, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. Norme associée à un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire.

Base orthonormée et formules de calcul des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une telle base.

Algorithme de Gram-Schmidt.

Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v.

Orthogonal d'un s.e.v.. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, somme directe orthogonale $F \oplus^\perp F^\perp = E$.

Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien.

2) Isométries en dimension n

— Isométrie vectorielle.

Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) ; \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$.

[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\cdot\|$), alors u est un automorphisme] [preuve]

Conservation du produit scalaire par une isométrie.

[preuve *]

— L'ensemble des isométries est non vide, stable par composition et par passage à l'inverse. **[preuve *]**

— Image d'une (de toute) base orthonormale par une isométrie.

— Stabilité de F^\perp l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u .

— Réflexion dans un espace euclidien. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus^\perp F^\perp$:

$$Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}$$

[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie, alors u est inversible et u^{-1} est une isométrie.] [preuve]

— Matrice orthogonale, inverse. On appelle indifféremment isométrie ou automorphisme orthogonal les éléments de $\mathcal{O}(E)$, l'ensemble des endomorphismes qui conservent la

norme.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.

— Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.

Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ pour un réel } \theta \text{ si son déterminant vaut } +1 ; \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ pour un réel } \theta \text{ si son déterminant vaut } -1.$$

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.

Ecriture complexe

— On appelle rotation d'un plan euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe \mathcal{B} , il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) =$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions.

4) Endomorphisme symétrique

— Endomorphisme symétrique : $u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle)$

— Ecriture matricielle dans une base orthonormée par une matrice symétrique réelle.

— Théorème spectral :

• tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles.

• toute matrice symétrique réelle est à spectre réel et diagonalisable dans une base orthonormée

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux **[preuve *]**

Liste [preuve *] :

T1 : Mélanie NIVET (CCINP)

T2 : Tamara RUMEN (CCINP, Centrale)

T4 : Angéline PACREAU (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)

T5 :

Aël NEUVEGLISE (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)

Raphaël CANDALH (CCINP/ Mines-Telecom)

T6 : Rozenn LE MARC (CCINP/ Mines-Telecom)

T7 : Brewen GOUEZ-CADOU (CCINP)

Cette liste peut bien sûr évoluer