ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

- **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** à un produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
  Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
  Algorithme de Gram-Schmidt.
- **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. .
- **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
  Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F + F^{\perp}$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F \oplus^{\perp} F^{\perp} = E}$.

2) Isométries en dimension n

- **Isométrie vectorielle**.
  Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \ ; \ \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
  [si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \| \ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**
  Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.
- Caractérisation des isométries par la **Conservation du produit scalaire**. **[preuve ⋆]**
- Caractérisation des isométries par la **Image d'une (de toute) base orthonormale**
- Matrice orthogonale, inverse.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale. **[preuve ⋆]**
Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

- Stabilité de $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

3) Isométries du plan

- Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.
- Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.
- Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.
- On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
  Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

à venir : endomorphismes auto-adjoints, théorème spectral

ch. X : Limites et continuité des fonctions

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

- **Boules ouvertes, boules fermées**
- **Point adhérent**
- **Limite d'une fonction** en un point adhérent
  Critère séquentiel.
- **continuité d'une fonction** de deux variables.
- **Partie fermée**
- **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné.
- **Partie ouverte**
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) = 0\}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x, y) \geq 0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue.
- point intérieur, **Intérieur Δ°** d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
- **adhérence $\overline{\Delta}$** d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
- Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie ; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie
- L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
- L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.
- Partie dense.
- Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$.

N.B. pour les interrogateurs : on n'hésitera pas à faire représenter graphiquement des ensembles de $\mathbb{R}^2$ donnés par des équations ou inéquations cartésiennes. On guidera les étudiants si besoin pour toutes les questions topologiques.

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin et Titouan, T7 Clémentine