Programme de colle n° 16, quinzaine 8

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. IX : Séries entières

1. Série de Taylor. Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
2. DSE via une équation différentielle :
   $\boxed{\textbf{DSE de } t\mapsto(1+t)^\alpha \text{ pour } \alpha\in\mathbb{R}.}$
   pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
3. **Produit de Cauchy** de deux séries entières, rayon de convergence.
4. Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise).

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

— **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** à un produit scalaire.
— Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
Algorithme de Gram-Schmidt.
— **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. .
— **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F+F^\perp$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F\oplus^\perp F^\perp=E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E)=\{u\in\mathcal{L}(E)\ ;\ \forall x\in E,\ \|u(x)\|=\|x\|\}$.
[si $u\in\mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E,\|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**
Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.
— Caractérisation des isométries par la **Conservation du produit scalaire**. **[preuve ⋆]**

— Caractérisation des isométries par la **Image d'une (de toute) base orthonormale**

— Matrice orthogonale, inverse.
Un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale. **[preuve ⋆]**
Groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}),\times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}),\times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

— Stabilité de $F^\perp$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.
— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}),\times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.
— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}),\times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.
— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r)=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}$
Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

à venir : endomorphismes auto-adjoints, théorème spectral

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéïs)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr, Vadel
T7 : Enora, Camille G.