ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

— **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** à un produit scalaire.

— Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
Algorithme de Gram-Schmidt.

— **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. .

— **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E, la somme $F+F^{\perp}$ est une **somme directe orthogonale** $\boxed{F \oplus^{\perp} F^{\perp} = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) ; \forall x \in E, \ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \| \ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**
Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.

— Caractérisation des isométries par la
Conservation du produit scalaire. **[preuve ⋆]**

— Caractérisation des isométries par la
Image d'une (de toute) base orthonormale

— Matrice orthogonale, inverse.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une
isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale. **[preuve ⋆]**
Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

déterminant d'une isométrie.

— Stabilité de $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :
$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, matrice de rotation d'angle un réel $\theta \in]-\pi,_p i]$ si son déterminant vaut $+1$; $N_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$, matrice de réflexion, pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Classification de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

4) Endomorphismes auto-adjoints

— **Endomorphisme auto-adjoint** : pour un endomorphsme u de E euclidien,
$u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \ < u(x)|y >=< x|u(y) >)$

— **Caractérisation des auto-adjoints** par l'**écriture matric** dans une base orthonormée.

— Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. **[preuve ⋆]**

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux **[preuve ⋆]**

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à spectre réel et est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée** :

Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T S P = D$

— **Endomorphisme auto-adjoint positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
$\forall x \in E, \ < u(x)|x > \geq 0$

— **Endomorphisme auto-adjoint défini positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
$\forall x \in E, \ x \neq 0_E \Rightarrow < u(x)|x > > 0$
Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$

— **Caractérisation spectrale des auto-adjoints** positifs ou définis positifs.

à venir : projecteurs orthogonaux, un p projecteur est orthogonal ssi p est auto-adjoint

N.B. pour les interrogateurs : on n'hésitera pas à faire représenter graphiquement des ensembles de $\mathbb{R}^2$ donnés par des équations ou inéquations cartésiennes. On guidera les étudiants si besoin pour toutes les questions topologiques.

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine