Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**. Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E)\ ;\ \forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\ \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**

Conservation du produit scalaire par une isométrie. **[preuve]**

Image d'une (de toute) base orthonormale par une isométrie.

— Si F est un s.e.v. de E stable par $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $u(F) = F$. **[preuve ⋆]**
Stabilité de l'orthogonal d'un s.e.v. stable par une isométrie.

— **Réflexion** dans un espace euclidien. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$: $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}}$
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie, alors u est inversible et u^{-1} est une isométrie.] **[preuve]**

— Matrice orthogonale, inverse. On appelle indifféremment **isométrie** ou **automorphisme orthogonal** les éléments de $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes qui conservent la norme.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale.

— **Groupe orthogonal** $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes : $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire. Ecriture complexe

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions.

4) Endomorphisme symétrique

— **Endomorphisme symétrique** :
$u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E,\ < u(x)|y >=< x|u(y) >)$

— **Ecriture matricielle dans une base orthonormée** par une matrice symétrique réelle.

— Si F est un s.e.v. de E stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^{\perp}$ est stable par u. **[preuve ⋆]**

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est à **spectre réel** et admet une base **orthonormale** de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre **réel** et **diagonalisable dans une base orthonormée**

à venir : probabilités : séries génératrices