Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

Norme, produit scalaire, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. Norme associée à un produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz. Norme associée à un produit scalaire. **Base orthonormée** et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une telle base. Algorithme de Gram-Schmidt. Théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. . Orthogonal d'un s.e.v., Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux, somme directe orthogonale $\boxed{F \oplus^{\perp} F^{\perp} = E}$.

2) Isométries en dimension n

— **Isométrie vectorielle**.
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \; ; \; \forall x \in E, \; \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \| \, \|)$, alors u est un automorphisme] **[preuve]**

Conservation du produit scalaire par une isométrie. **[preuve ⋆]**

— **Image d'une (de toute) base orthonormale** par une isométrie.

— Stabilité de $F^{\perp}$ l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u.

— **Réflexion** dans un espace euclidien. Ecriture matricielle de la réflexion par rapport à F dans une base adaptée à la somme directe $E = F \oplus^{\perp} F^{\perp}$:
$$\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & -1 \end{pmatrix}}$$

— Matrice orthogonale, inverse. On appelle indifféremment **isométrie** ou **automorphisme orthogonal** les éléments de $O(E)$, l'ensemble des endomorphismes qui conservent la norme.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée** est orthogonale.

— L'ensemble des isométries est non vide, stable par composition et par passage à l'inverse.
Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

3) Isométries du plan

— Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :
$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut $+1$; $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un réel θ si son déterminant vaut -1.

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire. Ecriture complexe

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe $\mathcal{B}$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
Classification des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions.

4) Endomorphisme symétrique

— **Endomorphisme symétrique** : $u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \; < u(x)|y > = < x|u(y) >)$

— **Ecriture matricielle dans une base orthonormée** à l'aide d'une matrice symétrique réelle.

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée**

— Si $u \in \mathcal{S}(E)$ et si F est un sous-e.v. stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u **[preuve]**

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux **[preuve ⋆]**