

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens

4) Endomorphismes auto-adjoints

- Endomorphisme auto-adjoint : pour un endomorphisme u de E euclidien,
 $u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle)$
- Caractérisation des auto-adjoints par l'écriture matricielle dans une base orthonormée.
- Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi. [preuve ★]

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux [preuve ★]

- Théorème spectral :
 - tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à spectre réel et est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
 - toute matrice symétrique réelle est à spectre réel et diagonalisable dans une base orthonormée :

Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T S P = D$

- Endomorphisme auto-adjoint positif : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
 $\forall x \in E, \langle u(x)|x \rangle \geq 0$
- Endomorphisme auto-adjoint défini positif : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
 $\forall x \in E, x \neq 0_E \Rightarrow \langle u(x)|x \rangle > 0$

Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$

- Caractérisation spectrale des auto-adjoints positifs ou définis positifs.
- Projecteurs orthogonaux. Caractérisation des projecteurs orthogonaux ce sont les projecteurs auto-adjoints.

ch. XII : Intégrales à paramètre

- Méthode d'étude de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle : ensemble de continuité, techniques de comparaison ($\sim$, o , O) en les bornes impropres.
les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée
- Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.
- Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination de $\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|$ sur des ensembles du type $[a, b] \times J$.
- Exemple de la fonction Γ d'Euler $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe $\mathcal{C}^1$ en exercice*

à venir : dérivations successives terme à terme ; théorème de convergence dominée à paramètre continu (nouveau du programme PC) ; couples de variables aléatoires

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ★]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ★]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine