Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.
Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.
Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Isométries des espaces euclidiens, endomorphismes symétriques

4) Endomorphisme symétrique

— **Endomorphisme symétrique** :
$u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \ < u(x)|y >=< x|u(y) >)$

— **Ecriture matricielle dans une base orthonormée** par une matrice symétrique réelle.

— Si F est un s.e.v. de E stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ est stable par u. **[preuve ⋆]**

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien est à **spectre réel** et admet une base **orthonormale** de vecteurs propres associés à des valeurs propres réelles.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre **réel** et **diagonalisable dans une base orthonormée**

ch. XII : Moments, séries génératrices

— **Espérance** d'une variable aléatoire (discrète) : Si $\sum x_n \mathbf{P}[X = x_n]$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance et on note : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \mathbf{P}(X = x_n)}$

— **Théorème du transfert** (admis) : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) \ f(x_n)$.

— Propriétés usuelles : **linéarité**. Espérance d'une somme finie de variables aléatoires. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.

— **Espérance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **l'espérance pour les lois usuelles** $\boxed{\text{Bernoulli } b(p), \text{ binomiale } B(N,p), \text{ Poisson } \mathcal{P}(\lambda), \text{ géométrique } \mathcal{G}(p)}$.
Calculs directs d'espérance pour les lois $b(p)$, $\mathcal{B}(N,p)$.

— Pour X à valeurs entières, si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.

— **Variance**.

— **Variance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **la variance pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.
Variance d'une somme (finie), variance d'une somme finie de variables indépendantes

— **série génératrice** (des moments) $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k] \ t^k}$
les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix)
les expressions des (sommes des) séries génératrices pour les lois usuelles $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

— Application au **calcul des variances ou espérances des lois usuelles** : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— Série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes.

— Somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.

— Fonction de répartition.

à venir : probabilités : séries génératrices