

Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement précis.**
- Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras coloré sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves*]** signalées en crochet gras coloré sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

1) Rappels de PCSI

- **produit scalaire**, dans un espace préhilbertien réel ou euclidien. **Norme associée** à un produit scalaire.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Base orthonormée et **formules de calcul** des normes et produits scalaires à l'aide des décompositions dans une base orthonormée.
Algorithme de Gram-Schmidt.
- **Théorème de projection** sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, formule du projeté orthogonal sur un s.e.v. muni d'une b.o.n. . Inégalité de Bessel. Distance à un s.e.v. .
- **Orthogonal d'un s.e.v.**, Supplémentaire orthogonal et dimension dans un e.v. euclidien. Sous-espaces vectoriels orthogonaux.
Dans E euclidien, pour F s.-e.v. de E , la somme $F + F^\perp$ est une **somme directe orthogonale** $F \oplus F^\perp = E$.

2) Isométries en dimension n

- **Isométrie vectorielle.**
Notation $\mathcal{O}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) ; \forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|\}$.
[si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie de l'espace euclidien $(E, \|\cdot\|$), alors u est un automorphisme] [preuve]
Groupe des isométries : $\mathcal{O}(E)$ est non vide, stable par composition et passage à l'inverse.
- Caractérisation des isométries par la **Conservation du produit scalaire.** [preuve *]
- Caractérisation des isométries par la **Image d'une (de toute) base orthonormale**
- Matrice orthogonale, inverse.
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **isométrie ssi sa matrice dans une base orthonormée est orthogonale.** [preuve *]
Groupe orthogonal $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse. Déterminant d'une matrice orthogonale.
Groupe spécial orthogonal $(\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}), \times)$: ensemble non vide, stable par produit et passage à l'inverse.
déterminant d'une isométrie.
- Stabilité de F^\perp l'orthogonal d'un s.e.v. F stable par une isométrie u .

3) Isométries du plan

- Orientation du plan ou de l'espace, à l'aide du déterminant d'une matrice de passage.

— Groupe matriciel $(\mathcal{O}_2(\mathbb{R}), \times)$ des isométries du plan. Toute matrice de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ est de l'une des formes suivantes :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ matrice de rotation d'angle un réel } \theta \in]-\pi, \pi[\text{ si son déterminant vaut } +1; N_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ matrice de réflexion, pour un réel } \theta \text{ si son déterminant vaut } -1.$$

— Groupe matriciel $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ des rotations du plan : Ecritures des coefficients à l'aide d'une mesure angulaire.

— On appelle **rotation d'un plan** euclidien orienté E toute application linéaire r telle que dans une base orthonormée directe \mathcal{B} , il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $Mat_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$

Classification de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des isométries (vectorielles) du plan : ce sont soit des rotations (isométries directes), soit des réflexions planes.

4) Endomorphismes auto-adjoints

- **Endomorphisme auto-adjoint** : pour un endomorphisme u de E euclidien,
 $u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E, \langle u(x)|y \rangle = \langle x|u(y) \rangle)$
- **Caractérisation des auto-adjoints** par l'écriture matricielle dans une base orthonormée.
- Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors F^\perp l'est aussi. [preuve *]

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux

— **Théorème spectral** :

- tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à spectre réel et est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

- toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée** :

Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T S P = D$

- **Endomorphisme auto-adjoint positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si

$$\forall x \in E, \langle u(x)|x \rangle \geq 0$$

- **Endomorphisme auto-adjoint défini positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si

$$\forall x \in E, x \neq 0_E \implies \langle u(x)|x \rangle > 0$$

$$\text{Notations } \mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E), \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

- **Caractérisation spectrale des auto-adjoints** positifs ou définis positifs.

à venir : projecteurs orthogonaux, un p projecteur est orthogonal ssi p est auto-adjoint. CH XI : intégrales à paramètre

Liste (en construction) [préparation avancée *] :

T1 : Clémence

T3 : Ollie (Mathéés)

T4 : Marie

T5 : Arthus, Volodymyr, Vadel

T7 : Enora, Camille G.