Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.
• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Fonctions de 2 ou 3 variables

— Normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. **Normes $\|\|_1$, $\|\|_2$, $\|\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^p$.**

— En dimension finies toutes les normes sont équivalentes.
(ADMIS).

— Limite d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

— Boules ouvertes, notation $B(A,\rho)$. Ouverts de $\mathbb{R}^2$.

— Continuité d'une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$
Exercices à réserver aux étudiants des **[preuve ⋆]**

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La classe $\mathcal{C}^1$.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{Grad}\, f(M)$.

— Application **différentielle** $\mathrm{d}f_A\ :\ (h_1,h_2) \longmapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(X) \geq f(A)}$$

Extremums locaux, Extremums globaux.
Condition nécessaire d'extremum : annulation du gradient.

— Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— **règle de la chaîne** : dérivation de $t \mapsto f(x(t),y(t))$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x,y); f(x,y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

— **Equations aux dérivées partielles** du premier ordre.
Exemple à connaître :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f : (x,y) \longmapsto K(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s,y)\ \mathrm{d}s$

— Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis)

— Equations aux dérivées partielles du second ordre.
$\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}}$ a pour solutions les fonctions de la forme $\{(x,y) \longmapsto x\ G(y) + K(y);\ G,K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v) \mapsto f(x(u,v),y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.
Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants :
transformation affine et passage en coordonnées polaires.

⟶ T.S.V.P.

ch. XII : Moments, séries génératrices

- **Espérance** d'une variable aléatoire (discrète) : Si $\sum x_n \mathbf{P}[X = x_n]$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance et on note : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \, \mathbf{P}(X = x_n)}$
- **Théorème du transfert** (admis) : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n) \, f(x_n)$.
- Propriétés usuelles : **linéarité**. Espérance d'une somme finie de variables aléatoires. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.
- **Espérance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **l'espérance pour les lois usuelles** Bernoulli $b(p)$, binomiale $B(N,p)$ Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, géométrique $\mathcal{G}(p)$.
- Pour X v.a. discrète, si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.
- **Variance**. Ecart-type. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$
- **Variance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **la variance pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.
- **série génératrice** (des moments) $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k] \, t^k}$ les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) séries génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.
- Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$
- Application au **calcul des variances ou espérances des lois usuelles** : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

à venir : probabilités : couples de variables aléatoires, covariance, coefficient de corrélation, indépendance

Liste **[preuve ⋆]** :

T1 : Mélanie NIVET (CCINP)

T2 : Tamara RUMEN (CCINP, Centrale)

T4 : Angéline PACREAU (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)

T5 :
Aël NEUVEGLISE (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)
Raphaël CANDALH (CCINP/ Mines-Telecom)

T6 : Rozenn LE MARC (CCINP/ Mines-Telecom)

T7 : Brewen GOUEZ-CADOU (CCINP)

Cette liste peut bien sûr évoluer