Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement précis.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XI : Intégrales à paramètre

— **Méthode d'étude de l'intégrabilité** d'une fonction sur un intervalle : ensemble de continuité, techniques de comparaison ($\sim$, o, O) en les bornes impropres.

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible]. Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$, $f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x,t)$ est **continue par morceaux** sur I ;

ii) pour tout $t \in I$, $f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x,t)$ est **continue** sur A ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\boxed{G : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].

Généralisation au cas de domination de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a,b] \times J$.

— **Exemple de la fonction Γ d'Euler**
$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe $\mathcal{C}^1$ en exercice*

— **Théorème de dérivations successives** d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis, preuve non exigible].

— **Théorème de convergence dominée à paramètre continu :**
Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et
$\boxed{\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\ \mathrm{d}t.}$

ch. X : Isométries des espaces euclidiens

4) Endomorphismes auto-adjoints

— **Endomorphisme auto-adjoint** : pour un endomorphsme u de E euclidien,
$u \in \mathcal{S}(E) \iff (\forall x, y \in E,\ < u(x)|y >=< x|u(y) >)$

— **Caractérisation des auto-adjoints** par l'**écriture matricielle** dans une base orthonormée.

— Si F est stable par $u \in \mathcal{S}(E)$, alors $F^\perp$ l'est aussi. **[preuve ⋆]**

Les sous-espaces propres des endomorphismes symétriques sont 2 à 2 orthogonaux

— **Théorème spectral** :
• tout endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien est à spectre réel et est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.
• toute matrice **symétrique réelle** est à spectre réel et **diagonalisable dans une base orthonormée** :

Si $S \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale réelle telles que $P^T SP = D$

— **Endomorphisme auto-adjoint positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
$\forall x \in E,\ < u(x)|x > \geq 0$

— **Endomorphisme auto-adjoint défini positif** : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif si
$\forall x \in E,\ x \neq 0_E \Rightarrow < u(x)|x > > 0$
Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$, $S_n^+(\mathbb{R})$, $S_n^{++}(\mathbb{R})$

— **Caractérisation spectrale des auto-adjoints** positifs ou définis positifs.

— Projecteurs orthogonaux.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux ce sont les projecteurs auto-adjoints.

à venir : CH XII : Limites, normes, continuité dans une espace vectoriel normé

Liste (en construction) **[préparation avancée ⋆]** :

T1 : Clémence
T3 : Ollie (Mathéés)
T4 : Marie
T5 : Arthus, Volodymyr, Vadel
T7 : Enora, Camille G.