Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XII : Moments, séries génératrices

— **Espérance** d'une variable aléatoire (discrète) : Si $\sum x_n \mathbf{P}[X = x_n]$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance et on note : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \mathbf{P}[X = x_n]}$

— **Théorème du transfert** (admis) :
si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie ssi $\sum_n \mathbf{P}[X = x_n]\ f(x_n)$ est ACV et dans ce cas, on a : $\boxed{\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\ \mathbf{P}[X = x_n]}$.

— Propriétés usuelles : **linéarité**. Espérance d'une somme finie de variables aléatoires. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.

— **Espérance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **l'espérance pour les lois usuelles** $\boxed{\text{Bernoulli } b(p), \text{ binomiale } B(N,p), \text{ Poisson } \mathcal{P}(\lambda)}$, $\boxed{\text{géométrique } \mathcal{G}(p)}$.
Calculs directs d'espérance pour les lois usuelles.

— Pour X à valeurs entières, si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.

— **Variance**.

— **Variance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **la variance pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.
Variance d'une somme (finie),
variance d'une somme finie de variables indépendantes

— (fonction) **série génératrice** (des moments)
$\boxed{G_X : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k]\ t^k}$
ou encore $\boxed{G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X]}$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix)
les expressions des (sommes des) séries génératrices pour les lois usuelles $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

— **Calcul des variances ou espérances des lois usuelles** par els séries génératrices : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.
[preuves]

— Série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes.

ch. XIII : Intégrales à paramètre

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a,b] \times J$.

— Théorème de dérivations successives d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis, preuve non exigible].

— **Exemple de la fonction** Γ d'Euler $\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\ dt$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe C^1 en exercice*

à venir : fonctions de deux variables