ch. XIV : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**

— Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.

— **série entière géométrique** $\sum z^n$,

— **série entière exponentielle** $\sum \frac{1}{n!} z^n$

— Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0,R)$.

— **Rayon de convergence** : $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.

— Somme d'une série entière.

ch. XII : Intégrales à paramètre

— **Théorème de dérivations successives** d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis, preuve non exigible].

— **Th de convergence dominée à paramètre continu :** Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x,t) \longmapsto f(x,t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x \to a]{} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x,t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x,t) \in A \times I,\ |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I f(x,t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x \to a]{} \int_I \ell(t)\ \mathrm{d}t.}$

ch. XIII : Indépendance, couples de variables aléatoires

1) Couples. Indépendance

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

2) Espérance

— **Espérance** : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X = x])$ sommable.

En pratique, X v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbb{P}[X = x_n]$ est ACV, et $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}[X = x_n]$.

— **linéarité** de l'espérance.
Théorème de **Transfert** :
$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X = x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.

— **Espérance d'un produit** de deux variables aléatoires **indépendantes**.

— propriétés de l'espérance : **positivité**, **croissance**.

2) Variance, corrélation, covariance.

— Définition.
En pratique, X v.a. discrète admet une variance lorsque $\mathbb{E}[X^2]$ existe et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2Cov(X,Y)$

— Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$ **[preuve ⋆]**

— **Coefficient de corrélation** $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

à venir : comparaison de rcv, règle de d'Alembert des séries entières, DSE usuels

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine