Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particuliérement précis.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XII : Espaces vectoriels normés, limites et continuité

1) Normes

— **Norme** sur un e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$.

— Définition (formules) des **normes usuelles** $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^n$.

— **Produit scalaire**, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.

— exemple $(M, N) \longmapsto \operatorname{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$M \longmapsto \sqrt{\operatorname{Tr}(M^T M)}$ la norme associée.

— exemple $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

— **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].

[niveau ⋆] justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

— Distance associée à une norme sur un e.v.n..

— **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.

les étudiants doivent savoir dessiner les boules unités sur $\mathbb{R}^2$ *pour les normes usuelles* $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$

— **Partie bornée** de $(E, \| \ \|_E)$.

— **Suite bornée** $(V_n)_{n\geq 0}$ de vecteurs de $(E, \| \ \|_E)$.

— **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, de Δ partie de $(E, \| \ \|_E)$ vers $(F, \| \ \|_F)$.

— limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles.

[pour tous] :

(V_n) converge vers L dans E ssi :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$

2) Limites, continuité

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

— **Point adhérent**

— **Limite d'une fonction** en un point adhérent

Critère séquentiel.

à venir : partie ouverte, intérieur, continuité théorème des bornes atteintes, propriétés topologiques des ouverts et des fermés, adhérence, convexes

ch. XI : Intégrales à paramètre

— **Méthode d'étude de l'intégrabilité** d'une fonction sur un intervalle : ensemble de continuité, techniques de comparaison ($\sim$, o, O) en les bornes impropres.

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible]. Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, t) \longmapsto f(x, t)$ telle que :

i) pour tout $x \in A$, $f_{x,\bullet} : I \longrightarrow \mathbb{K},\ t \longmapsto f(x, t)$ est **continue par morceaux** sur I ;

ii) pour tout $t \in I$, $f_{\bullet,t} : I \to \mathbb{K},\ x \mapsto f(x, t)$ est **continue** sur A ;

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **continue par morceaux**, **positive** et **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x, t) \in A \times I,\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors $\boxed{G : A \longrightarrow \mathbb{K},\ x \longmapsto \int_I f(x, t)\ \mathrm{d}t \text{ est continue sur } A.}$

Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].

Généralisation au cas de domination de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a, b] \times J$.

— **Exemple de la fonction** Γ d'Euler

$\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe* $\mathcal{C}^1$ *en exercice*

— **Théorème de dérivations successives** d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis, preuve non exigible].

— **Théorème de convergence dominée à paramètre continu :**

Soient A et I deux **intervalles** de $\mathbb{R}$, a une borne de A, et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K},\ (x, t) \longmapsto f(x, t)$ telle que :

i) Pour tout $t \in I$, $f(x, t) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell(t)$

ii) Pour tout $x \in A$, $t \longmapsto f(x, t)$ et $t \longmapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I

iii) il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ **intégrable** sur I telle que :

$$\forall\ (x, t) \in A \times I,\ |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\boxed{\int_I f(x, t)\ \mathrm{d}t \underset{x \to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\ \mathrm{d}t.}$