Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Intégrales à paramètre

les étudiants doivent réviser le chapitre sur les intégrales généralisées et savoir étudier la convergence d'une intégrale généralisée

— **Théorème de continuité** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination (locale compacte) sur tous les segments d'un intervalle.

— **Théorème de dérivation** d'une intégrale à paramètre [Admis, preuve non exigible].
Généralisation au cas de domination de $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|$ sur des ensembles du type $[a, b] \times J$.

— Théorème de dérivations successives d'une intégrale à paramètre, pour obtenir la classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. [Admis, preuve non exigible].

— **Exemple de la fonction** Γ d'Euler $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$. *N.B. : tous doivent savoir montrer la continuité ou la classe C^1 en exercice*

ch. XI : Fonctions de 2 ou 3 variables

pré-requis déjà étudiés : notions de Normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, Normes $\|\|_1$, $\|\|_2$, $\|\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^p$, en dimension finies toutes les normes sont équivalentes, limite d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

— Boules ouvertes, notation $B(A, \rho)$. Ouverts de $\mathbb{R}^2$.

— Continuité d'une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
fonctions dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La **classe $\mathcal{C}^1$**.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o\,(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{Grad\ f}(M)$.

— Application **différentielle** $\mathrm{d}f_A : (h_1, h_2) \longmapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

— **règle de la chaîne** : dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x, y); f(x, y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

à venir : extrema, caractérisation par les points critiques, théorème des bornes atteintes pour une fonction continue sur un fermé borné. Equations aux dérivées partielles