Mesures et incertitudes

Introduction :

Mesurer une grandeur physique est une activité fondamentale dans les laboratoires de recherche scientifique et dans l'industrie. Mesurer une grandeur n'est pas simplement rechercher la valeur de cette grandeur mais aussi lui associer une incertitude afin de pouvoir estimer la qualité de l'expérience .

1. Mesure et erreur de mesure

1.1. Définitions

- **Le mesurande** : c'est le nom de la grandeur physique que l'on veut mesurer . *Exemple: une résistance R*.
- **Le mesurage** : c'est l'ensemble des opérations permettant de mesurer expérimentalement le mesurande.
- **La valeur vraie (*M_{vraie}*)** : c'est la valeur du mesurande que l'on obtiendrait si le mesurage était parfait. *Un mesurage n'étant jamais parfait, cette valeur est toujours inconnue.*
- **La mesure (*m*)** : c'est la valeur donnée par le mesurage.
- **Le résultat du mesurage (*M*)**: c'est l'expression complète du résultat.
- **Erreur de mesure :** c'est la différence entre la valeur mesurée et la valeur vrai : $\boxed{E_R = (m - M_{vraie})}$
- **Erreur relative :** $\boxed{Er = \frac{|M_{vraie} - m|}{M_{vraie}}}$ rend compte de **l'exactitude** de la mesure et s'exprime le plus souvent en %. Plus E_r est petite plus la mesure est exacte.
- **Conditions de répétabilité :** ces conditions sont remplies lorsque le même opérateur ou le même programme effectue N mesures exactement dans les mêmes conditions.
- **La valeur moyenne:** $\boxed{\overline{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i}$ Si on effectue N mesures dans des conditions de répétabilité, c'est le meilleur estimateur de la valeur du mesurande .
- **Grandeur d'influence :** c'est une grandeur qui a un effet sur le résultat du mesurage (température, pression...).

1.2. Les composantes de l'erreur de mesure

Quand on effectue N mesures dans des conditions de répétabilité, on considère qu'une erreur possède 2 composantes : **une composante aléatoire** et **une composante systématique**.

a) La composante aléatoire

Par définition: $\boxed{(E_{Ra} = m_i - \overline{m})}$. Elle provient des variations temporelles et spatiales **non prévisibles** de grandeurs d'influence.

L'erreur aléatoire peut être réduite en augmentant le nombre d'observations.

b) La composante systématique

Par définition $\boxed{E_{RS} = (\overline{m} - M_{vraie})}$. Il existe de nombreuses sources d'erreurs systématiques.

Les sources d'erreurs systématiques . :

- L'erreur de justesse des appareils (décalage du zéro, mauvais calibrage...)
- La position de l'objet mesuré
- Introduction d'un appareil de mesure (en électricité)
- L'effet de grandeurs d'influence (température pression...)

L'erreur systématique peut être considérée comme une erreur constante qui affecte chacune des mesures.

Comment détecter et évaluer les erreurs systématiques :

- Mesurer la même grandeur avec des instruments ou méthodes différents
- Mesurer une grandeur étalon (contrôle de la justesse)

L'erreur systématique ne peut être réduite en augmentant le nombre de mesures mais par l'application d'une correction.

c) Fidélité (ou précision) et justesse (ou exactitude)

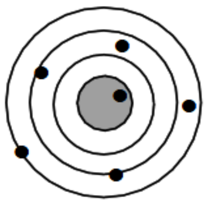
On considère toujours que l'on effectue N mesures dans des conditions de répétabilité.

On peut écrire : $E_R = m_i - M_{vraie} = (m_i - \overline{m}) + (\overline{m} - M_{vraie})$ d'où $\boxed{E_R = E_{Ra} + E_{RS}}$.

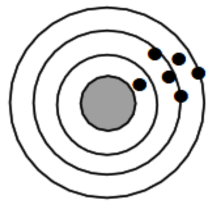
La fidélité d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications très voisines lors de la détermination répétée du même mesurande dans les mêmes conditions.

La justesse d'un instrument de mesure est son aptitude à donner des indications exemptes d'erreur systématique.

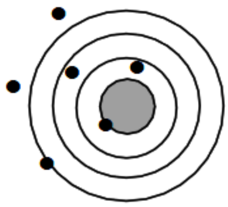
On peut illustrer ces notions d'erreurs systématique et aléatoire par le tir dans une cible :



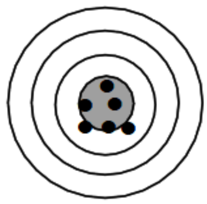
juste, mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
erreurs aléatoires



fidèle, mais pas juste
(valeurs décentrées mais resserrées)
erreurs systématiques



ni juste, ni fidèle
erreurs aléatoires et systématiques



fidèle et juste
erreurs faibles

Rem : En général on ne connaît pas la cible.

2.Incertitudes de mesure - expression du résultat

2.1.Incertitude type s et incertitude absolue élargie ΔM

Le résultat du mesurage consiste à définir un intervalle dans lequel on pense avoir une probabilité donnée de trouver la valeur cherchée.

Le résultat d'un mesurage est toujours exprimé sous la forme d'un intervalle des valeurs probables du mesurande $\boxed{M = m \mp \Delta M}$ associé à un niveau de confiance P.

- $\boxed{\Delta M}$ s'appelle l'incertitude absolue élargie associée à un niveau de confiance P.
- $\boxed{[m - \Delta M \,; m + \Delta M]}$ est l'intervalle de confiance associé au niveau de confiance P.
- $\boxed{s}$ est l' incertitude-type , c'est une incertitude de mesure exprimée sous la forme d'un **écart-type .**

Relation entre s et ΔM:

$\Delta M = k\,s$ .avec k le facteur d'élargissement associé à un certain niveau de confiance P.

Pour un niveau de confiance de 95%, k=2. On travaillera avec un niveau de confiance de 95%.

On utilisera la formule : $\boxed{\Delta M = 2\,s}$

2.2. Écriture du résultat

L'écriture du résultat du mesurage doit intégrer l'incertitude, le niveau de confiance et s'écrire avec les unités appropriées : $\boxed{M = m \pm \Delta M}$, unité, niveau de confiance.

- On définit **la précision** du résultat du mesurage par : $\boxed{\left|\frac{\Delta M}{m}\right|}$. Cette précision est souvent exprimée en %.

Plus le résultat est petit, plus le mesurage est précis *(mais pas forcément exact !)*.

Nombre de chiffres significatifs de m et de ΔM :

Une incertitude est elle-même évaluée de façon approchée, au mieux avec une précision de 10%. Sauf cas tout à fait exceptionnel où les conditions de mesure sont très contraignantes et très coûteuses :

- **On écrit *ΔM avec un seul chiffre significatif, exceptionnellement avec 2.***
- **Pour l'estimation de la grandeur mesurée m, on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position (au sens numération) que celui de l'incertitude.**

Exemples :

- Résultat affiché par la calculatrice: *ΔM= 0,0358 unités.*→O**n écrira *ΔM= 0,04 unités***
- Résultat affiché sur la calculatrice : m = 8.237489 pour ΔM = 0,04 unités →**On écrit: M = 8,24 ± 0,04 unités**
  - Résultat affiché par la calculatrice :m = 8,0026 pour ΔM = 0,04 unités **On écrit: M = 8,00 ± 0,04 unités**

Des zéros peuvent être significatifs !

- On mesure r = 100,251389 Ω avec une incertitude Δr= 0,812349 Ω. → On écrit R = (100,3 ± 0,8) Ω.
- On mesure r = 132,537kΩ avec une incertitude de 350 Ω. On écrit R = (132,5 ± 0,3) kΩ.

2.3. Incertitude absolue élargie composée

Une grandeur physique Y n'est pas directement mesurable mais telle que : $Y = f(X_1, X_2, \dots X_k, \dots X_N)$.

Les X_k sont des grandeurs directement mesurables dont le résultat du mesurage est : $M_k = m_k \pm \Delta M_k$.

On suppose : $M = m \pm \Delta M$ le résultat associé à Y.

- **Cas d'une somme :**

Si $Y = \sum_k^N a_k X_k$ (les a_k sont des coefficients constants) alors $m = \sum_k^N a_k m_k$ et $\Delta M = \sqrt{\sum_k^N a_k^2 \Delta M_k^2}$

- **Cas d'un produit :**

Si $Y = \prod_{k=1}^N X_k^{n_k}$ alors $m = \prod_{k=1}^N m_k^{n_k}$ et $\frac{\Delta M}{M} = \sqrt{\sum_{k=1}^N n_k^2 \left(\frac{\Delta M_k}{m_k}\right)^2}$

3. Évaluation de l'incertitude-type : expression de ΔM

L'évaluation des incertitudes par des méthodes statistiques est dite de ***type A****.*

Quand la détermination statistique n'est pas possible, on dit que l'évaluation est de ***type B*** *(cas d'une mesure unique)*

3.1. Évaluation de type A

Si on effectue N mesures dans des conditions de répétabilité :

- **L'écart type expérimental** a pour expression : $\boxed{s_{\exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (m_i - \overline{m})^2}}$ $s_{\exp}$ représente une estimation de la dispersion des valeurs prises par x autour de la valeur moyenne.

- **L'incertitude-type** est alors : $\boxed{s = \sqrt{\frac{1}{N}} s_{\exp}}$.

Pour un niveau de confiance de 95% $\boxed{\Delta M = 2s = 2\sqrt{\frac{1}{N}}\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(m_i - \bar{m})^2} = 2\frac{\sigma}{\sqrt{N-1}}}$

3.2.Évaluation de type B

l'incertitude-type est évaluée par un jugement scientifique fondé sur toutes les informations disponibles au sujet du mesurage. Différents cas peuvent se présenter :

- **Lecture sur une échelle graduée :** $s = \frac{1\ graduation}{\sqrt{12}}$.

Pour un niveau de confiance de 95% $\boxed{\Delta M = 2s = \frac{1\ graduation}{\sqrt{3}}}$

Exemple : On lit sur une règle graduée tous les mm : L=12,55 cm

L'incertitude absolue élargie est : $\Delta L = \frac{1}{\sqrt{3}} mm = 0{,}58 = 0{,}6\ mm$ au niveau de confiance 95%.

Instrument affichant une tolérance ± α: $s = \frac{\alpha \times \text{valeur déterminée}}{\sqrt{3}}$

Pour un niveau de confiance de 95% $\boxed{\Delta M = 2s = \frac{2\alpha \times \text{valeur déterminée}}{\sqrt{3}}}$

Exemple : Une résistance affiche R=200Ω avec une tolérance de 2%.

L'incertitude absolue élargie est : $\Delta R = \frac{2 \times \frac{2}{100} \times 200}{\sqrt{3}} \Omega = 4{,}62 = 5\Omega$

On écrira le résultat sous la forme : $R = (200 \pm 5)\Omega$ au niveau de confiance 95%.

Appareils numériques

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digits (un digit correspond au dernier chiffre afiché sur l'écran). $s = \frac{p \times \text{valeur lue} + N\ \text{digits}}{\sqrt{3}}$

Pour un niveau de confiance de 95% $\boxed{\Delta M = 2s = 2\frac{p \times \text{valeur lue} + N\ \text{digits}}{\sqrt{3}}}$

Exemple 1: Un ampèremètre affiche 5,21mA, la précision est de (3% ± 1 digit)

L'incertitude absolue élargie est : $\Delta I = 2\frac{\frac{3}{100} \times 5{,}21 + 0{,}01}{\sqrt{3}} mA = 0{,}19\ mA = 0{,}2\ mA$

On écrira le résultat sous la forme : $I = (5{,}2 \pm 0{,}2)\ mA$ au niveau de confiance 95%.

Exemple 2: Un voltmètre affiche 4,816 V, la précision est de (0,5% ± 3 digit)

L'incertitude absolue élargie est : $\Delta I = 2\frac{\frac{0{,}5}{100} \times 4{,}816 + 0{,}003}{\sqrt{3}} mA = 0{,}027\ V = 0{,}03\ V$

On écrira le résultat sous la forme : $U = (4{,}82 \pm 0{,}03)\ V$ au niveau de confiance 95%.