Suites à valeurs complexes

L'objectif de cette note est d'indiquer les notions concernant les suites à valeurs réelles qui s'étendent aux suites à valeurs complexes.

On verra qu'il n'y a pas de différences notables.

I Anneau $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites à valeurs complexes

1. Généralités

Définition

> ***Définition 1*** *Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs complexes est une famille de nombres complexes indexés par l'ensemble $\mathbb{N}$. On peut donc la considérer comme une application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{C}$.*

L'ensemble des suites à valeurs complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

Par exemple, la suite $\left(e^{i\,n\,\theta}\right)_n$ où $\theta \in \mathbb{R}$ est un exemple de suite à valeurs complexes.

Parties réelle et imaginaire ; module Étant donné $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit les suites à valeurs réelles suivantes :

- la suite des parties réelles $(\mathrm{Re}(z_n))_n$;
- la suite des parties imaginaires $(\mathrm{Im}(z_n))_n$;
- la suite des modules $(|z_n|)_n$.

Reprenons l'exemple de la suite $\left(e^{i\,n\,\theta}\right)_n$. On a

- la suite des parties réelles est la suite $(\cos(n\,\theta))_n$;
- la suite des parties imaginaires est la suite $(\sin(n\,\theta))_n$;
- la suite des modules est la suite constante égale à 1.

Suite bornée

> ***Définition 2*** *On dit qu'une suite $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $C > 0$ tel que $|z_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

> ***Propriété 1*** *Une suite $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les suites réelles $(Re(z_n))_n$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_n$ sont bornées*

Démonstration. — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathrm{Re}(z_n)$ et $b_n = \mathrm{Im}(z_n)$. On a donc $z_n = a_n + i\, b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$) Supposons $(z_n)_n$ bornée. Il existe donc $C > 0$ tel que $|z_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Mais $|a_n| \leq |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et $|a_b| \leq |z_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'où $|a_n| \leq C$ et $|b_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que les suites $(a_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont bornées.

$\Leftarrow$) Supposons que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont bornées. Il existe donc $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que $|a_n| \leq C_1$ et $|b_n| \leq C_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or l'inégalité triangulaire entraîne $|z_n| \leq |a_n| + |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
D'où $|z_n| \leq C_1 + C_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui montre que la suite complexe $(z_n)_n$ est bornée.

$\square$

Mise en garde. *Attention. La notion de suite majorée et de suite minorée n'a de sens que si la suite est à valeurs réelles, l'ensemble $\mathbb{C}$ n'ayant pas de relation d'ordre naturelle prolongeant celle que nous connaissons sur $\mathbb{R}$.*

2. Opérations sur les suites à valeurs complexes

On définit de manière analogue à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des lois $+$; $\times$ et $\div$ avec les restrictions d'usage sur $\div$.

L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni des lois $+$ et $\times$ est alors un anneau commutatif.

Signalons une dernière opération, qui est la multiplication par un complexe ou scalaire [1] : étant donnés $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on définit la suite $\alpha \cdot (u_n)_n$ comme la suite $(\alpha\, u_n)_n$.

L'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ muni de la loi $+$ et de la multiplication $\cdot$ par un scalaire est ce qu'on appelle un $\mathbb{C}-$espace vectoriel.

Exemple : *La suite $(e^{i\,n\,\theta})_n$ est donc égale à $(\cos(n\theta))_n + i \cdot (\sin(n\theta))_n$*

II Notion de limite

Ici seule la notion de limite finie a du sens. Il suffit de considérer la suite géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$ pour s'en convaincre.

1. Définition

Définition 3 *Soit $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On dit que $(z_n)_n$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_\epsilon,\ |z_n - \ell| < \epsilon.$$

Si $(u_n)_n$ converge vers ℓ, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ et ℓ est appelée la limite de la suite $(z_n)_n$.

De manière générale, on dit qu'une suite $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est convergente s'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = \ell$.

Comme dans le cas d'une suite à valeurs réelles, on a les propriétés suivantes :

- la limite d'une suite convergente est **unique** ;
- une suite convergente est **bornée**, l'inverse étant faux.

1. Dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, les scalaires sont des réels et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de $+$ et $\cdot$ est ce qu'on appellera sous peu un $\mathbb{R}-$espace vectoriel.

Remarque : *Compte-tenu de la définition, on peut observer que* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $\ell \in \mathbb{C}$ *si et seulement si* $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$.

EXEMPLE : *Soit* $z \in \mathbb{C}$ *avec* $|z| < 1$. *La suite complexe* $(z^n)_n$ *converge vers* 0.

En effet $|z^n| = |z|^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Caractérisation

> ***Théorème 1*** *Soit* $(z_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
> *La suite complexe* $(z_n)_n$ *converge si et seulement si les suites réelles* $(a_n)_n = (Re(z_n))_n$ *et* $(b_n)_n = (\mathrm{Im}(z_n))_n$ *convergent.*
> *Dans ces conditions, on a*
>
> $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} z_n = \lim_{n\to+\infty} a_n + i \lim_{n\to+\infty} b_n.}$$

Démonstration. —

$\Rightarrow$) Supposons que $(z_n)_n$ converge vers $\ell = u + i\,v$ avec $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$. Puisque $|a_n - u| \leq |z_n - \ell|$ et $|b_n - v| \leq |z_n - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit par application du théorème des gendarmes que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = u \text{ et } \lim_{n\to+\infty} b_n = v.$$

$\Leftarrow$) Supposons que $(a_n)_n$ converge vers $u \in \mathbb{R}$ et que $(b_n)_n$ converge vers $v \in \mathbb{R}$. Posons $\ell = u + i\,v$.
D'après l'inégalité triangulaire on a pour $|z_n - \ell| \leq |a_n - u| + |b_n - v|$ tout $n \in \mathbb{N}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n - u| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} |b_n - v| = 0$. D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - \ell| = 0$.
Il en résulte que $(z_n)_n$ converge vers ℓ.

□

On retiendra que l'étude de la convergence d'une suite à valeurs complexes peut se ramener à étudier la convergence de deux suites réelles.

3. Limite et opérations usuelles

Soient $(z_n)_n$ et $(\omega_n)_n$ deux suites à valeurs complexes telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \ell \in \mathbb{C}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \omega_n = \ell' \in \mathbb{C}$.

On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n + \omega_n = \ell + \ell'$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n\,\omega_n = \ell\,\ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, alors $\omega_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{z_n}{\omega_n} = \dfrac{\ell}{\ell'}$.