Exercice 1

On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[^2$ par :

$$f(x,y) = x + y + \frac{1}{xy}$$

1. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[^2$, et calculer ses dérivées partielles premières.
   (b) Démontrer que f admet un unique point critique sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$.

2. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[^2$, et calculer ses dérivées partielles secondes.
   (b) En déduire la matrice hessienne $H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$
   (c) Expliciter $H(1,1)$, son polynôme caractéristique et l'aide du théorème de Schwarz, justifier que $H(1,1) \in \mathcal{S}_2^{++}$.
   on verra à la fin du chapitre que l'on peut en déduire que f admet un minimum local en $A = (1,1)$.

3. (a) Justifier que la fonction $\ln$ est deux fois dérivable sur $I =]0,+\infty[$ et calculer l'expression de sa dérivée seconde.
   (b) En déduire que la fonction $-\ln$ est convexe sur son ensemble de définition.
   (c) On rappelle que si $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe sur un intervalle J, alors :

   $$\forall x, y \in J,\ \forall t \in [0,1],\ g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y)$$

   Quelle est l'interprétation géométrique de ce résultat ?
   (d) Pour $a, b, c > 0$, montrer que :
   (1) $\quad -\ln\left(\dfrac{b+c}{2}\right) \leq -\dfrac{1}{2}\ln(b) - \dfrac{1}{2}\ln(c)$
   (2) $\quad -\ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \leq -\dfrac{1}{3}\ln(a) - \dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$
   En déduire :
   (3) $\quad -\ln\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) \leq -\dfrac{1}{3}\ln(a) - \dfrac{1}{3}\ln(b) - \dfrac{1}{3}\ln(c)$
   (e) en déduire que :

   $$\forall (a,b,c) \in]0,+\infty[^3, \quad \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \qquad (4)$$

   (f) Appliquer l'inégalité (4) en $x, y, \dfrac{1}{xy}$.
   En déduire que f admet pour minimum global $3 = f(1,1)$.