Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch.XII : Moments, séries génératrices

— **Espérance** d'une variable aléatoire (discrète) : Si $\sum x_n \mathbf{P}[X = x_n]$ est absolument convergente, on dit que X admet une espérance et on note : $\boxed{\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \ \mathbf{P}(X = x_n)}$

— **Théorème du transfert** (admis) : $\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n)$.

— Propriétés usuelles : **linéarité**. Espérance d'une somme finie de variables aléatoires. Espérance d'un produit de deux variables aléatoires indépendantes.

— **Espérance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **l'espérance pour les lois usuelles** $\boxed{\text{Bernoulli } b(p), \text{ binomiale } B(N,p)}$ $\boxed{\text{Poisson } \mathcal{P}(\lambda), \text{ géométrique } \mathcal{G}(p)}$.

— Pour X v.a. discrète, si $\mathbb{E}(X^2)$ existe, alors $\mathbb{E}(X)$ existe.

— **Variance**. Ecart-type. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$

— **Variance des lois usuelles :** les étudiants doivent connaître (et savoir calculer par une méthode de leur choix) **la variance pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

— **série génératrice** (des moments)

$$G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X = k]\ t^k}$$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) séries génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

— Application au **calcul des variances ou espérances des lois usuelles** : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— Couples. Indépendance

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

— Série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

— Variance d'une somme (finie), variance d'une somme finie de var

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.

Coefficient de corrélation $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.

interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

ch.XIII : Suites de variables aléatoires

— Suite de variables mutuellement indépendantes.

— Loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson.

— variance d'une somme de deux variables indépendantes, généralisation aux sommes finies.

— **1ère Inégalité de Markov** : pour une variable admettant une espérance : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$

[preuve ⋆]

— 2ème Inégalité de Markov : pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}}$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

— **Loi faible des grands nombres :** si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant une variance finie (un moment d'ordre 2), alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$

— la loi géométrique est sans mémoire.

— Somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson. **[preuve ⋆]**

à venir : Approximation binomiale-Poisson ; fonction de répartition

Liste **[preuve ⋆]** :

T1 : Mélanie NIVET (CCINP)

T2 : Tamara RUMEN (CCINP, Centrale)

T4 : Angéline PACREAU (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)

T5 :
Aël NEUVEGLISE (on peut essayer de poser un exercice plus formel/abstrait, type Mines-Telecom ou Mines d'abord)
Raphaël CANDALH (CCINP/ Mines-Telecom)

T6 : Rozenn LE MARC (CCINP/ Mines-Telecom)

T7 : Brewen GOUEZ-CADOU (CCINP)

Cette liste peut bien sûr évoluer