ch. XIV : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - Série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Lien avec les séries numériques et les séries de fonctions.
   - **série entière géométrique** $\sum z^n$,
   - **série entière exponentielle** $\sum \frac{1}{n!} z^n$
   - Lemme d'Abel. Absolue convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence $D(0,R)$.
   - **Rayon de convergence** :
     $R = \sup\{r \geq 0;\ (|a_n| r^n)_n \text{ bornée }\}$.
   - Somme d'une série entière.
   - **règle de d'Alembert des séries entières**.
   - **Séries entières de la variable réelle.**
     - Série entière d'une variable réelle.
       Ouvert de convergence $]-R,R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R,R[$.
     - Continuité de la somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R,R[$.
     - **Primitivation terme à terme**.
     - **Dérivation terme à terme**.
     - **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :
       $t \mapsto \ln(1-t)$, $t \mapsto \frac{1}{1-t}$, $t \mapsto \ln(1+t)$,
       $t \mapsto \mathrm{Arctan}(t)$
       $\exp,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh},\ \cos,\ \sin$
   - Fonction développable en série entière.
     Unicité du développement en série entière.
     Série de Taylor.
     Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
   - DSE via une équation différentielle :
     DSE de $t \mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
     pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
   - Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
   - Comparaison de rayons de convergence avec O ou $\sim$.
   - somme de deux séries entières, Produit de Cauchy

ch. XIII : Indépendance, couples de variables aléatoires

2) Espérance

- **Espérance** :
  $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X=x]$, lorsque $(x\mathbb{P}[X=x])$ sommable.
  En pratique, X v.a. discrète admet une espérance lorsque la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \mathbb{P}[X=x_n]$ est ACV, et $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}[X=x_n]$.
- **linéarité** de l'espérance.
  Théorème de **Transfert** :
  $\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)\mathbb{P}[X=x_n]$, lorsque $f(X)$ admet une espérance.
- **Espérance d'un produit** de deux variables aléatoires **indépendantes**.
- propriétés de l'espérance : **positivité**, **croissance**.

2) Variance, corrélation, covariance.

- Définition.
  En pratique, X v.a. discrète admet une variance lorsque $\mathbb{E}[X^2]$ existe et $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$.
- Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
  $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2Cov(X,Y)$
- Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$ **[preuve ⋆]**
- **Coefficient de corrélation** $\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
  interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

à venir : Fonctions de plusieurs variables

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine