Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particuliérement précis.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothéses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XII : Espaces vectoriels normés, limites et continuité

1) Normes

— **Norme** sur un e.v.n.. Espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$.
— Définition (formules) des **normes usuelles** $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$ sur $E = \mathbb{R}^n$.
— **Produit scalaire**, norme associée à un produit scalaire, sur un espace préhilbertien réel.
— exemple $(M, N) \longmapsto \mathrm{Tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$M \longmapsto \sqrt{\mathrm{Tr}(M^T M)}$ la norme associée.
— exemple $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.
— **Equivalence de normes**. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes [ADMIS].

[niveau ⋆] justifier à l'aide d'une suite (f_n) de fonctions que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

— Distance associée à une norme sur un e.v.n..
— **Boule fermée**, **Boule unité fermée** , **Boule ouverte**.
les étudiants doivent savoir dessiner les boules unités sur $\mathbb{R}^2$ *pour les normes usuelles* $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$, $\| \ \|_\infty$
— **Partie bornée** de $(E, \| \ \|_E)$.
— **Suite bornée** $(V_n)_{n \geq 0}$ de vecteurs de $(E, \| \ \|_E)$.
— **Fonction bornée** $f : \Delta \to F$, de Δ partie de $(E, \| \ \|_E)$ vers $(F, \| \ \|_F)$.
— Définition de la limite d'une suite vectorielle, opérations usuelles : (V_n) converge vers L dans E ssi :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N};\ \forall n \geq n_0, \|V_n - L\|_E \leq \varepsilon$ **[pour tous]**

2) Limites, continuité

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

— Point adhérent, adhérence **[niveau ⋆]**
— **Limite d'une fonction** en un point adhérent
Critère séquentiel.
— Définition **Partie ouverte** **[pour tous]**
— Définition partie fermée. Une parte est fermée ssi son complémentaire est un ouvert.
— **continuité d'une fonction** de deux variables.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $A \in \mathbb{R}^2$ ssi :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0;\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$
[pour tous]
— continuité d'une fonction $f : E \to F$, avec E, F e.v.n.
— **Partie fermée**
— **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné : toute fonction continue sur une partie fermée et bornée y est bornée et atteint ses bornes.

3) Topologie

— $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**
— $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) \geq 0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**
— point intérieur, **Intérieur** Δ° d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ **[niveau ⋆]**
— **adhérence** $\overline{\Delta}$ d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$
— Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie. **[niveau ⋆]**
— L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. **[niveau ⋆]**
— L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. **[niveau ⋆]**
— Partie dense. **[niveau ⋆]**
— Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$. **[niveau ⋆]**

à venir : Fonctions génératrices, inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchébychev