Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIV : Fonctions de 2 ou 3 variables

pré-requis déjà étudiés : notions de Normes sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, Normes $\|\|_1$, $\|\|_2$, $\|\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^p$, en dimension finies toutes les normes sont équivalentes, limite d'une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

— Boules ouvertes, notation $B(A,\rho)$. Ouverts de $\mathbb{R}^2$.

— Continuité d'une fonction $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
fonctions dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La **classe $\mathcal{C}^1$**.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{Grad\ f}(M)$.

— Application **différentielle** $\mathrm{d}f_A : (h_1,h_2) \longmapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

— **règle de la chaîne** :
dérivation de $t \mapsto f(x(t),y(t))$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x,y); f(x,y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :
$$\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\| \le \varepsilon \Rightarrow f(X) \ge f(A)}$$

Extremums locaux, Extremums globaux.
Condition nécessaire d'extremum : annulation du gradient.

— Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— **Equations aux dérivées partielles** du premier ordre.
Exemple à connaître :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)}$ a pour solutions les fonctions de la forme
$$f : (x,y) \longmapsto K(y) + \int_{x_0}^{x} g(s,y)\ \mathrm{d}s$$

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v) \mapsto f(x(u,v),y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.
Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine et passage en coordonnées polaires.

— Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis)

— Equations aux dérivées partielles du second ordre.
$\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}}$ a pour solutions les fonctions de la forme
$\left\{(x,y) \longmapsto x\ G(y) + K(y);\ G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$

N.B. pour les colleurs : le chapitre sur les arcs paramétrés et les surfaces sera vu ultérieurement. La technique de recherche effective d'extremums en cas de points critiques doit être guidée (pas de Hessienne cette année, patience)