ch. XIV : Séries entières

1. **Séries entières de la variable complexe.**
   - **règle de d'Alembert des séries entières**.
   - **Séries entières de la variable réelle.**
     - Série entière d'une variable réelle.
       Ouvert de convergence $]-R,R[$. Convergence normale sur tout segment de $]-R,R[$.
     - Continuité de la somme d'une série entière réelle $\sum a_n x^n$ sur l'ouvert de convergence $]-R,R[$.
     - **Primitivation terme à terme**.
     - **Dérivation terme à terme**.
     - **D.S.E. usuels** (et rayons de convergence) :
       $\boxed{t\mapsto \ln(1-t),\ t\mapsto \frac{1}{1-t},\ t\mapsto \ln(1+t)}$,
       $\boxed{t\mapsto \mathrm{Arctan}(t)}$
       $\boxed{\exp,\ \mathrm{ch},\ \mathrm{sh},\ \cos,\ \sin}$
   - Fonction développable en série entière.
     Unicité du développement en série entière.
     Série de Taylor.
     Toute fonction développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ y est égale à la somme de sa série de Taylor.
   - DSE via une équation différentielle :
     DSE de $t\mapsto (1+t)^\alpha$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$.
     pratique de la méthode par analyse-synthèse pour trouver les solutions D.S.E. d'une équation différentielle
   - Continuité de la somme d'une série entière complexe sur le disque ouvert de convergence (preuve admise) pour la somme de la série entière de la variable complexe.
   - Comparaison de rayons de convergence avec O ou $\sim$.
   - somme de deux séries entières, Produit de Cauchy

ch. XV : Calcul différentiel

1) Rappels de PCSI

- **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.
  Fonctions dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
  Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
  fonctions dérivées partielles premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- La **classe $\mathcal{C}^1$**.
- Toute fonction $f:\mathcal{U}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a\in\mathcal{U}$:
  $$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a)+o(h)}$$
- Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.
- **règle de la chaîne** :
  dérivation de $t\mapsto f(x(t),y(t))$.
  interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K=\{(x,y);f(x,y)=K\}$ d'une fonction $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.
- dérivées partielles premières d'une fonction de deux variables ;
- la classe $\mathcal{C}^1$
- Vecteur gradient et développement limité d'ordre 1 pour $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
- Obtention d'une équation cartésienne de la tangente à une courbe en un point régulier d'une courbe donnée par son équation (implicite) cartésienne $f(x,y)=0$, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{\nabla} f$.
  interprétation : la tangente en M à une courbe plane d'équation cartésienne $f(x,y)=0$ est la droite passant par M et orthogonale à $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.
- On dit que $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :
  $$\boxed{\exists\varepsilon>0;\ \forall X\in\mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\|\le\varepsilon\Rightarrow f(X)\ge f(A)}$$
  Extremums locaux, Extremums globaux.
- **Condition nécessaire d'extremum** : annulation du gradient. En un point extrémal de l'ouvert U, il y a nécessairement un point critique. La réciproque est fausse.

2) Compléments PC

- Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).
- La classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ pour uen fonction de p variables, $p\ge 2$.
  Dérivées partielles premières, vecteur gradient.
- $DL_1(a)$ pour $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, avec le gradient ou les dérivées partielles premières.
- Application **différentielle** $\mathrm{d}f_A:(h_1,h_2)\longmapsto h_1\frac{\partial f}{\partial x}(A)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(A)$.

3) Dérivation des fonctions vectorielles

- Dérivation de $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, vecteur vitesse.
- Dérivation de $t\longmapsto L(f(t))$ avec L linéaire, de $t\mapsto B(f(t),g(t))$ avec B bilinéaire. Exemples avec le produit scalaire ou le produit vectoriel.

4) La classe $\mathcal{C}^2$.

- Définition.
  Notation des dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz(Admis)

à venir : matrice hessienne, CNS d'extremum en un point critique d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine