Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une $\boxed{\text{formule}}$ encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIV : Fonctions de 2 ou 3 variables

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :
$\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(X) \geq f(A)}$

Extremums locaux, Extremums globaux.
Condition nécessaire d'extremum : annulation du gradient.

— Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— **Equations aux dérivées partielles** du premier ordre.Exemple à connaître :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)}$ a pour solutions les fonctions de la forme
$f : (x,y) \longmapsto K(y) + \displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s,y)\ \mathrm{d}s$

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v) \mapsto f(x(u,v), y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.
Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine et passage en coordonnées polaires.

— Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis)

— Equations aux dérivées partielles du second ordre.
$\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tilde{0}}$ a pour solutions les fonctions de la forme
$\left\{(x,y) \longmapsto x\ G(y) + K(y);\ G, K \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$

ch. XV : Couples et suites de variables aléatoires

1) Couples. Indépendance

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

2) Corrélation, covariance.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
Coefficient de corrélation $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3) Théorèmes limites

— variance d'une somme de deux variables indépendantes, généralisation aux sommes finies.

— **1ère Inégalité de Markov** : pour une variable admettant une espérance : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$

— 2ème Inégalité de Markov : pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}}$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

— **Loi faible des grands nombres :**
si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi admettant une variance finie (un moment d'ordre 2), alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$

: à venir : approximation binomiale-Poisson)