Déroulement d'une colle :

- Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

- Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIV : Fonctions de 2 (ou 3) variables. Surfaces.

— **Equations aux dérivées partielles** du premier ordre.
Exemple à connaître :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=g(x,y)}$ a pour solutions les fonctions de la forme $f:(x,y)\longmapsto K(y)+\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(s,y)\,\mathrm{d}s$

— Dérivées partielles d'ordre 2, fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz (admis)

— Equations aux dérivées partielles du second ordre.
$\boxed{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\tilde{0}}$ a pour solutions les fonctions de la forme $\left\{(x,y)\longmapsto x\;G(y)+K(y);\;G,K\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v)\mapsto f(x(u,v),y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.

Les étudiants doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine et passage en coordonnées polaires.

ch. XV : Couples et suites de variables aléatoires

1) Couples. Indépendance

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales** $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

2) Moments

— **Espérance** , **linéarité**, théorème de **Transfert**.

— **Espérance d'un produit** de deux variables aléatoires **indépendantes**.

— propriétés de l'espérance : **positivité**, **croissance**.

3) Corrélation, covariance.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.
Coefficient de corrélation $\rho(X,Y)=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.
interprétation de $-1\leq\rho(X,Y)\leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4) Théorèmes limites

— variance d'une somme de deux variables indépendantes, généralisation aux sommes finies.

— **1ère Inégalité de Markov** : pour une variable admettant une espérance : $\boxed{\forall t>0,\ \mathbf{P}[|X|\geq t]\leq\dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$

— 2ème Inégalité de Markov : pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall t>0,\ \mathbf{P}[|X|\geq t]\leq\dfrac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}}$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall\varepsilon>0,\ \mathbf{P}[|X-\mathbb{E}[X]|\geq\varepsilon]\leq\dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

— **Loi faible des grands nombres :**
si $(X_n)_{n\geqslant1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant une variance finie (un moment d'ordre 2), alors, si $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$, $m=\mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma=\sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon>0$, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n-m\right|\geqslant\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.}$