Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particuliérement précis.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Fonctions génératrices ; suites de v.a.

1) Fonctions génératrices

— **Fonction génératrice** d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

$$\boxed{G_X : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X=k]\ t^k}$$

ou encore $\boxed{G_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left[t^X\right]}$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) fonctions génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

points **[preuves]**

• si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\boxed{G_X : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = \lambda}$

• si $Y \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\boxed{G_Y : t \mapsto \dfrac{pt}{1-(1-p)t}}$ est définie sur $]-1/(1-p), 1/(1-p)[$, $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p},\ \mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}}$

• si $S \sim \mathcal{B}(N,p)$, alors $\boxed{G_S : t \mapsto (1-p+pt)^N}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[S] = Np, \quad \mathbb{V}[S] = Np(1-p)}$

— G_X est continue sur $[-R,R]$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur $[-R,R]$. **[preuves⋆]**

— Dans le cas d'une v ;a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas, $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ (admis, preuve non exigible)

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G'_X(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

— **Calcul des variances ou espérances des lois usuelles** par els séries génératrices : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— Série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes : si X et Y sont indépendantes, alors

$$\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}$$

pour tout t appartenant aux deux intervalles ouverts de convergence des séries entières $\sum \mathbf{P}[X=k]\ t^k$ et $\sum \mathbf{P}[Y=k]\ t^k$.

[preuves⋆]

— La fonction génératrice G_X caractérise la loi de $X : \Omega \to \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X=n] = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{n!}$

[preuves⋆]

2) Suites de v.a.i.i.d.

— notion de suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

— Variable centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$

— Variable réduite lorsque $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = 1$

à venir : inégalités de Markov, de Bienaymé-Tchébychev

ch. XII : Espaces vectoriels normés, limites et continuité

2) Continuité

N.B. On se limitera à des fonctions de deux (voire trois) variables, à valeurs réelles ou vectorielles, en dimension finie.

— Définition **Partie ouverte** **[pour tous]**

— Définition partie fermée. Une parte est fermée ssi son complémentaire est un ouvert.

— **continuité d'une fonction** de deux variables.
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue en $A \in \mathbb{R}^2$ ssi :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0;\ \forall X \in \mathbb{R}^2,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow |f(X) - f(A)| \leq \varepsilon$
[pour tous]

— continuité d'une fonction $f : E \to F$, avec E, F e.v.n.

— **Partie fermée**

— **Théorème des bornes atteintes** pour une fonction continue sur un fermé borné : toute fonction continue sur une partie fermée et bornée y est bornée et atteint ses bornes.

3) Topologie

— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**

— $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) = 0\}$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; f(x,y) \geq 0\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ pour f continue. **[pour tous]**

— point intérieur, **Intérieur** Δ° d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$ **[niveau ⋆]**

— **adhérence** $\overline{\Delta}$ d'une partie Δ de $\mathbb{R}^2$

— Propriété des ouverts et fermés (stabilité des ouverts par réunion finie ou dénombrable et par intersection finie ; stabilité des fermés par intersection finie ou dénombrable et par réunion finie. **[niveau ⋆]**

— L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert. **[niveau ⋆]**

— L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé. **[niveau ⋆]**

— Partie dense. **[niveau ⋆]**

— Partie convexe dans $\mathbb{R}^2$. **[niveau ⋆]**