Révisions d'analyse

Un des énoncés de cours suivants ainsi qu'une application directe sera proposée lors de l'interrogation orale :

1. **Théorème de dérivation terme à terme** de la somme dune série de fonctions.
2. **Théorème d'interversion limite-intégrale** sur un segment, avec hypothèse de convergence uniforme.
3. **Théorème de convergence dominée**.
4. **Théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions**.
5. **Théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions**.

ch. XV : Calcul différentiel

1) Rappels de PCSI

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.
fonctions dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La **classe $\mathcal{C}^1$**.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.

— **règle de la chaîne** :
dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x, y); f(x, y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

— dérivées partielles premières d'une fonction de deux variables ;

— la classe $\mathcal{C}^1$

— Vecteur gradient et développement limité d'ordre 1 pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

— Obtention d'une équation cartésienne de la tangente à une courbe en un point régulier d'une courbe donnée par son équation (implicite) cartésienne $f(x, y) = 0$, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{\nabla} f$.
interprétation : la tangente en M à une courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ est la droite passant par M et orthogonale à $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si :

$$\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(X) \geq f(A)}$$

Extremums locaux, Extremums globaux.

— **Condition nécessaire d'extremum** : annulation du gradient. En un point extrémal de l'ouvert U, il y a nécessairement un point critique. La réciproque est fausse.

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.
N.B. : le programme ne demande pas de compétences explicites pour la résolution d'E.D.P.

2) Compléments PC

— Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— La classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ pour uen fonction de p variables, $p \geq 2$. Dérivées partielles premières, vecteur gradient.

— $DL_1(a)$ pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, avec le gradient ou les dérivées partielles premières.

— Application différentielle $\mathrm{d}f_A : (h_1, h_2) \longmapsto h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

3) Dérivation des fonctions vectorielles

— Dérivation de $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, vecteur vitesse.

— Dérivation de $t \longmapsto L(f(t))$ avec L linéaire, de $t \mapsto B(f(t), g(t))$ avec B bilinéaire. Exemples avec le produit scalaire ou le produit vectoriel.

4) La classe $\mathcal{C}^2$.

— Définition.
Notation des dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz(Admis)

— **Matrice Hessienne** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ admet un **développement limité d'ordre 2** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) +}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\nabla f_a} \cdot \overrightarrow{h} + \frac{1}{2} \overrightarrow{h}^T\ H_f(a)\ \overrightarrow{h} + o\left(\|h\|^2\right)}$$

— **C.N.S. d'extremum** en un point critique pour une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, et interprétation en termes de maximum ou minimum local lorsque le signe commun des valeurs propres est connu.

— En a critique, il s'agit d'un maximum local strict si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, il s'agit d'un minimum local strict si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$.

à venir : fonctions génératrices, inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.**

Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques points **[pour tous]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques points **[niveau ⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

Liste (en construction) **[niveau ⋆]** : T2 Esteban, T4 Mathis, T6 Youn, Corentin, T7 Clémentine