Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement PRÉCIS.** Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues. Quelques **[preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants. Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée. • Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XV : Couples et suites de variables aléatoires

1) Couples. Indépendance

— **Couple de deux variables aléatoires, loi conjointe** $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ (ou loi du couple (X,Y)) dans un tableau.

— **Lois marginales $\mathbf{P}_X$** et $\mathbf{P}_Y$. Visualisation dans les marges du tableau précédent.

— **Indépendance** de deux variables aléatoires.

2) Corrélation, covariance.

— Variance d'une somme de deux variables aléatoires. **Covariance**.

Coefficient de corrélation $\rho(X,Y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$.

interprétation de $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3) Théorèmes limites

— variance d'une somme de deux variables indépendantes, généralisation aux sommes finies.

— **1ère Inégalité de Markov** : pour une variable admettant une espérance : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$

— 2ème Inégalité de Markov : pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall t > 0,\ \mathbf{P}[|X| \geq t] \leq \dfrac{\mathbb{E}[X^2]}{t^2}}$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Pour X telle que $\mathbb{E}(X^2)$ existe : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbf{P}[|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

— **Loi faible des grands nombres :**
si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi admettant une variance finie (un moment d'ordre 2), alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\dfrac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.}$
Approximation binomiale-Poisson

— Fonction de répartition $F_X : t \mapsto \mathbf{P}[X \leq t]$. Limites en $-\infty$ et $+\infty$

ch. XIV : Arcs paramétrés. Surfaces.

— Dérivabilité d'une fonction $\overrightarrow{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, à l'aide de taux d'accroissements vectoriels. Développement limité vectoriel d'ordre 1 pour une fonction dérivable. Classe $\mathcal{C}^k$.

— Arc paramétré continu. Arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^1$. **Vecteur vitesse**.

— Tangente à une courbe Γ représentant un arc paramétré plan $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$ en un point $M = \gamma(t_0)$ obtenu pour un paramètre régulier t_0 : il s'agit de la droite passant par $\gamma(t_0)$ et dirigée par $\gamma'(t_0)$

— Arc paramétré $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Paramétrisation γ de classe $\mathcal{C}^k$ d'une courbe $\Gamma = \gamma(I)$.

— Arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Vecteur accélération.

— **Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$** : ensemble de définition, périodicité, réduction de l'intervalle d'étude en cas de symétries, tableau de variations mutuelles pour des arcs réguliers, tracé.

— Obtention d'une équation cartésienne de la tangente à une courbe en un point régulier d'une courbe donnée par son équation (implicite) cartésienne $f(x,y) = 0$, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{Grad} f$.
interprétation : **la tangente en M à une courbe plane d'équation cartésienne** $f(x,y) = 0$ est la droite passant par M et orthogonale à $\overrightarrow{Grad}\ f(M)$.

N.B. : un exercice sur une courbe paramétrée peut être l'occasion de réviser les notions d'ensembles de définition, la notion de dérivabilité, les développements limites, etc !!!

N.B. pour les interrogateurs : L'utilisation de développement limités pour trouver la tangente en un point non régulier est **Hors programme** *(mais comme les développements limités vectoriels sont au programme, on peut guider, comme dans le cas des comportements asymptotiques de solutions de systèmes différentiels...)*

De même la notion de courbe asymptote (ou de droite asymptote) est **Hors Programme** .