Déroulement d'une colle :

• Au début de colle, une question de cours sera systématiquement posée : **Tout énoncé de proposition ou définition doit être particulièrement précis.**
Ce sera soit une définition, soit propriété soulignée, ou une formule encadrée dont les hypothèses précises permettant de l'utiliser doivent être connues.

Quelques **points [preuves]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles de tous les étudiants.

Quelques **[preuves⋆]** signalées en crochet gras colorié sont exigibles des étudiants qui ont une compréhension du cours plus avancée.

• Vous passez ensuite aux exercices.

ch. XIII : Fonctions génératrices ; suites de v.a.

— **Fonction génératrice** d'une v.a. $X : \Omega \to \mathbb{N}$.

$$\boxed{G_X : t \longmapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X=k]\ t^k}$$ ou encore $$\boxed{G_X : t \longmapsto \mathbb{E}\left[t^X\right]}$$

les étudiants doivent connaître (et savoir calculer) **les expressions des (sommes des) fonctions génératrices pour les lois usuelles** $\boxed{b(p),\ B(N,p),\ P(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$.

points [preuves]

• si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\boxed{G_X : t \mapsto e^{\lambda(t-1)}}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}[X] = \lambda}$

• si $Y \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\boxed{G_Y : t \mapsto \dfrac{pt}{1-(1-p)t}}$ est définie sur $]-1/(1-p), 1/(1-p)[$, $\boxed{\mathbb{E}[Y] = \dfrac{1}{p},\ \mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}}$

• si $S \sim \mathcal{B}(N,p)$, alors $\boxed{G_S : t \mapsto (1-p+pt)^N}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\mathbb{E}[S] = Np, \quad \mathbb{V}[S] = Np(1-p)}$

— G_X est continue sur $[-R,R]$, comme somme d'une série de fonctions continues qui converge normalement sur $[-R,R]$. **[preuves⋆]**

— Dans le cas d'une v ;a. X à valeurs dans $\mathbb{N}$, X admet une espérance ssi G_X est dérivable en 1, auquel cas, $\boxed{\mathbb{E}[X] = G_X'(1)}$ (admis, preuve non exigible)

— Dans le cas d'une loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle $\mathbb{E}(X^2)$ existe , alors $\boxed{\mathbb{E}[X] = G_X'(1)}$ et $\boxed{\mathbb{V}[X] = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2}$

— **Calcul des variances ou espérances des lois usuelles** par els séries génératrices : $\boxed{b(p),\ \mathcal{B}(N,p),\ \mathcal{P}(\lambda),\ \mathcal{G}(p)}$. **[preuves]**

— Série génératrice d'une somme de deux variables indépendantes : si X et Y sont indépendantes, alors $\boxed{G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t)}$ pour tout t appartenant aux deux intervalles ouverts de convergence des séries entières $\sum \mathbf{P}[X=k]\ t^k$ et $\sum \mathbf{P}[Y=k]\ t^k$. **[preuves⋆]**

— La fonction génératrice G_X caractérise la loi de $X : \Omega \to \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X=n] = \dfrac{G_X^{(k)}(0)}{n!}$ **[preuves⋆]**

— notion de suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Variable centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$. Variable réduite lorsque $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]} = 1$

— **Inégalité de Markov** si $\mathbb{E}[|X|]$ existe et est finie, alors :

$$\boxed{\forall t > 0,\ \mathbb{P}[\{|X| \geq t\}] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}}$$

— **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** si $\mathbb{E}[X^2]$ existe et est finie, alors : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}[\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon\}] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}}$

[Interprétation, niveau ⋆] : lorsque (X_i) est une suite de v.a.i.i.d. d'espérance μ et de variance σ^2, $I =]\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon[$ est un intervalle de confiance pour la moyenne empirique $M_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$, avec la probabilité de confiance minorée par $1 - \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$.

ch. XIV : Calcul différentiel

1) Rappels de PCSI

— **Dérivées partielles** en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$, notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Fonctions dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Généralisation à une fonction de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$.

fonctions dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

— La **classe $\mathcal{C}^1$**.

— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ admet un **développement limité d'ordre 1** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(h)}$$

— Vecteur **Gradient** $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.

— **règle de la chaîne** :
dérivation de $t \mapsto f(x(t), y(t))$.
interprétation pour les **lignes de niveau planes** $\mathcal{L}_K = \{(x,y); f(x,y) = K\}$ d'une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$: Le vecteur gradient est orthogonal aux (tangentes des) lignes de niveau.

— dérivées partielles premières d'une fonction de deux variables ; la classe $\mathcal{C}^1$

— Vecteur gradient et développement limité d'ordre 1 pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

— Obtention d'une équation cartésienne de la tangente à une courbe en un point régulier d'une courbe donnée par son équation (implicite) cartésienne $f(x,y) = 0$, à l'aide du vecteur $\overrightarrow{\nabla} f$.

interprétation : la tangente en M à une courbe plane d'équation cartésienne $f(x,y) = 0$ est la droite passant par M et orthogonale à $\overrightarrow{\nabla} f(M)$.

— On dit que $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ admet un minimum local en A appartenant à l'ouvert $\mathcal{U}$ si : $\boxed{\exists \varepsilon > 0;\ \forall X \in \mathcal{U},\ \|\overrightarrow{AX}\| \leq \varepsilon \Rightarrow f(X) \geq f(A)}$

Extremums locaux, Extremums globaux.

— **Condition nécessaire d'extremum** : annulation du gradient. En un point extrémal de l'ouvert U, il y a nécessairement un point critique. La réciproque est fausse.

à venir dans la suite du cours (hors programme de colle) :

— **Dérivation de fonctions composées** de la forme $(u,v) \mapsto f(x(u,v),y(u,v))$.
Cas des coordonnées polaires, cas des changements de variables affines.
N.B. : le programme ne demande pas de compétences explicites pour la résolution d'E.D.P.

2) Compléments PC

— Toute f continue sur un fermé borné K de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles y est **bornée et atteint ses bornes** (ADMIS).

— La classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$ pour uen fonction de p variables, $p \geq 2$. Dérivées partielles premières, vecteur gradient.
— $DL_1(a)$ pour $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, avec le gradient ou les dérivées partielles premières.
— Application différentielle $\mathrm{d}f_A : (h_1,h_2) \longmapsto h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) + h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$.

3) Dérivation des fonctions vectorielles
— Dérivation de $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p,\mathbb{R})$, vecteur vitesse.
— Dérivation de $t \longmapsto L(f(t))$ avec L linéaire, de $t \mapsto B(f(t),g(t))$ avec B bilinéaire. Exemples avec le produit scalaire ou le produit vectoriel.

4) La classe $\mathcal{C}^2$.
— Définition.
Notation des dérivées partielles d'ordre 2. Théorème de Schwarz(Admis)
— **Matrice Hessienne** d'une fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$.
— Toute fonction $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ admet un **développement limité d'ordre 2** en $a \in \mathcal{U}$:

$$\boxed{f(a+h) \underset{(h)\to(0,0)}{=} f(a)+}$$
$$\boxed{\overrightarrow{\nabla f_a}\cdot\overrightarrow{h} + \frac{1}{2}\overrightarrow{h}^T\ H_f(a)\ \overrightarrow{h} + o\left(\|h\|^2\right)}$$

— **C.N.S. d'extremum** en un point critique pour une application $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, et interprétation en termes de maximum ou minimum local lorsque le signe commun des valeurs propres est connu.
— En a critique, il s'agit d'un maximum local strict si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) > 0$, il s'agit d'un minimum local strict si $\det(H_f(a)) > 0$ et $\mathrm{Tr}(H_f(a)) < 0$.