EXERCICE

E est un espace euclidien de dimension $n \geqslant 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \longmapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E. On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) :

$$(1) \quad \forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y)).$$

1) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

- **a)** Étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n, on note $a_{i,j}$ le (i, j)-ème coefficient de A. Justifier :
$$a_{i,j} = (u(e_j)|e_i).$$
- **b)** En déduire l'égalité : ${}^tA = -A$.

2) Montrer que l'entier n est un nombre pair.
Indication : On pourra considérer le déterminant de la matrice A.

3) On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E.

4) Soit λ une valeur propre réelle de v, montrer que λ est strictement négative.

5) On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.

- **a)** Montrer que la dimension de F est égale à 2.
- **b)** Montrer que F est stable par l'automorphisme u, en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u. On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.
- **c)** Soit λ une valeur propre réelle de v, on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \dfrac{1}{\| x \|}x$ *et* $e'_2 = \dfrac{1}{a \| x \|}u(x)$.
- **d)** Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).

6) On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$" de E et deux réels α et β non nuls tels que la matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$