EXERCICE 1 (original n° 2)

1. (a) D'un côté la j-ème colonne de la matrice A est $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u(e_j))$ colonne des coefficients de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$. Ainsi $a_{i,j}$ qui le coefficient de la matrice A situé à la i-éme ligne et la j-ème colonne est la i-ème coordonnée du vecteur $u(e_j)$.
D'un autre côté comme $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, la i-ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ du vecteur $u(e_j)$ est $(u(e_j)|e_i)$.

Ceci justifie que : $\boxed{a_{i,j} = (u(e_j) \mid e_i)}$

(b) Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Je note $a'_{i,j}$ le coefficient en position (i,j) de la matrice ${}^t\mathrm{A}$. Selon la question précédente, on a

$$a_{i,j} = (u(e_j) \mid e_i) = -(e_j \mid u(e_i)) = -(u(e_i) \mid e_j) = -a_{j,i} = -a'_{i,j}$$

Ainsi on a en déduit l'égalité : $\boxed{{}^t\mathrm{A} = -\mathrm{A}}$

2. On a
$$\det(\mathrm{A}) = \det\left({}^t\mathrm{A}\right) = \det(-\mathrm{A}) = (-1)^n \det(\mathrm{A})$$
Or $\det(\mathrm{A}) = \det(u) \neq 0$ car u est automorphisme de E
donc $(-1)^n = 1$ ainsi $\boxed{\text{l'entier } n \text{ est un nombre pair}}$

3. On a $u \in \mathrm{GL(E)}$ (ensemble des automorphismes de E) or $(\mathrm{GL(E)}, \circ)$ est stable par composition.
donc $v \in \mathrm{GL(E)}$ ainsi v un automorphisme de E. *Non demandé par le sujet initial.*
La matrice de $v = u^2$ dans la base $\mathcal{B}$ est A^2 et ${}^t\left(\mathrm{A}^2\right) = \left({}^t\mathrm{A}\right)^2 = (-\mathrm{A})^2 = \mathrm{A}^2$
Ainsi la matrice de v dans la base orthonormale $\mathcal{B}$ de E est symétrique donc l'endomorphisme est symétrique.
Ainsi $\boxed{v \text{ est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E}}$

4. On considère x un vecteur propre de v associé à λ. On a $v(x) = \lambda x$.
D'une part, $(v(x) \mid x) = \lambda(x \mid x) = \lambda\|x\|^2$ et d'autre part $(v(x) \mid x) = \left(u^2(x) \mid x\right) = -(u(x) \mid u(x)) = -\|u(x)\|^2$
donc $\lambda\|x\|^2 = -\|u(x)\|^2$ or $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ donc $u(x) \neq 0_{\mathrm{E}}$ car u est un automorphisme de E
d'où $\|x\|^2 > 0$ et $\|u(x)\|^2 > 0$ ainsi $\boxed{\lambda < 0}$

5. (a) On a $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ (vecteur propre) et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ donc $1 \leqslant \dim(\mathrm{F}) \leqslant 2$.
Par l'absurde, si on avait $\dim(\mathrm{F}) = 1$, on aurait $(u(x), x)$ liée
ce qui nous fournit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \mu x$.
Ainsi $\lambda x = v(x) = u^2(x) = \mu^2 x$ et $x \neq 0_{\mathrm{E}}$
donc $\lambda = \mu^2$ donc $\mu^2 < 0$ d'après la question précédente
ce qui est absurde car $\mu \in \mathbb{R}$. D'où $\boxed{\text{la dimension de F est égale à 2}}$

(b) On a $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ et u linéaire et $\lambda \neq 0$. Ainsi

$$u(\mathrm{F}) = \mathrm{Vect}(u(x), u^2(x)) = \mathrm{Vect}(u(x), v(x)) = \mathrm{Vect}(u(x), \lambda x) = \mathrm{Vect}(u(x), x) = \mathrm{F}$$

donc $\boxed{\text{F est stable par l'automorphisme } u}$

Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. Montrons $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$ c'est à dire : $\forall y \in \mathrm{F},\ x \perp y$.
Soit alors $y \in \mathrm{F}$. On a $u(y) \in \mathrm{F}$ d'après ce qui précède et donc $x \perp u(y)$ ainsi

$$(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y)) = 0$$

On conclut que $u(x) \in \mathrm{F}^\perp$. Ce qui permet d'en déduire que $\boxed{\text{l'orthogonal } \mathrm{F}^\perp \text{ est aussi stable par } u}$

(c) D'après (a) et (b), $(x, u(x))$ est génératrice de F et $\dim(\mathrm{F}) = 2$ ainsi il s'agit d'une base de F.
Comme $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, on peut noter les vecteurs de F : $e_1' = \dfrac{1}{\|x\|}x$ et $e_2' = \dfrac{1}{a\|x\|}u(x)$ comme dans l'indication.
On a alors $\|e_1'\| = 1$ et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a

$$\|e_2'\|^2 = (e_2' \mid e_2') = \frac{(u(x) \mid u(x))}{a^2\|x\|^2} = \frac{-\left(x \mid u^2(x)\right)}{-\lambda\|x\|^2} = \frac{(x \mid \lambda x)}{\lambda\|x\|^2} = 1$$

et on a $(e_1' \mid e_2') = 0$ car

$$(e_2' \mid e_1') = \frac{(u(x) \mid x)}{a\|x\|^2} = \frac{-(x \mid u(x))}{a\|x\|^2} = -(e_1' \mid e_2') = -(e_2' \mid e_1')$$

ainsi $\mathcal{B}' = (e_1', e_2')$ est une famille orthonormale de F donc base orthonormée car $\dim \mathrm{F} = 2$
de plus comme u est linéaire et $a = \sqrt{-\lambda} \neq 0$, on a :

$$u(e_1') = \frac{1}{\|x\|}u(x) = ae_2' = 0e_1' + ae_2'$$

et comme $u^2(x) = v(x) = \lambda x$, on a :

$$u(e_2') = \frac{1}{a\|x\|}u^2(x) = \frac{\lambda}{a\|x\|}x = \frac{-a^2}{a\|x\|}x = -ae_1' + 0e_2'$$

$\boxed{\text{il existe une base orthonormée } \mathcal{B}' \text{ de F telle que la matrice de } u_{\mathrm{F}} \text{ dans la base } \mathcal{B}' \text{ soit } \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}}$

(d) $u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un endomorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ selon (b). Soit $x \in \mathrm{F}^\perp$. On a

$$x \in \mathrm{Ker}\,(u_{\mathrm{F}^\perp}) \Longleftrightarrow u_{\mathrm{F}^\perp}(x) = 0_{\mathrm{E}} \Longleftrightarrow u(x) = 0_{\mathrm{E}} \Longleftrightarrow x = 0_{\mathrm{E}}$$

car u est un autmorphisme de E.
Ainsi $\mathrm{Ker}\,(u_{\mathrm{F}^\perp}) = \{0_{\mathrm{E}}\}$ or $\mathrm{F}^\perp$ est de dimension finie $(n-2)$
donc $u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un automorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \mathrm{F}^\perp \times \mathrm{F}^\perp,\ (u_{\mathrm{F}^\perp}(x) \mid y) = (u(x) \mid y) = -(x \mid u(y)) = -(x \mid u_{\mathrm{F}^\perp}(y)) \qquad (1)$$

Ainsi $\boxed{\text{l'endomorphisme } u_{\mathrm{F}^\perp} \text{ est un automorphisme vérifiant la relation (1)}}$

6. On reprend les notations et résultats de 5). On y a trouvé une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F dans laquelle u_{F} a une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. On remarque que a est non nul car $a^2 = -\lambda > 0$.

Comme E est de dimension finie, on a $\mathrm{F} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ donc $\dim\left(\mathrm{F}^\perp\right) = \dim(\mathrm{E}) - \dim(\mathrm{F}) = 4 - 2 = 2$
$u_{\mathrm{F}^\perp}$ est un automorphisme de $\mathrm{F}^\perp$ vérifiant la relation (1). alors en faisant comme en 5) trouver e_1'' et $e_2'' \in \mathrm{F}^\perp$ tels que : $\mathcal{B}_2 = (e_1'', e_2'')$ base orthonormée de G stable par $u_{\mathrm{F}^\perp}$ dans la qulle la matrice a la même forme que celle obtenue en 5(c) (ou ci-dessus).
On remarque que $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$ car G sous-espace de $\mathrm{F}^\perp$ de dimension égale à 2

En concaténant les bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}_2$, on obtient $\mathcal{B}''$ une base adaptée à $\mathrm{F} \overset{\perp}{\bigoplus} \mathrm{F}^\perp = \mathrm{E}$ d'où l'existence de

$\boxed{\alpha, \beta \in \mathbb{R}^* \text{ et } \mathcal{B}\text{" base orthonormée de E tels que la matrice de } u \text{ dans } \mathcal{B}\text{" soit égale à : } \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}}$