

Dynamique en référentiel galiléen

(partie 1)

1. La face cachée d'un iceberg ☺

On assimile un iceberg à un bloc de glace cubique d'arête a . On appelle h la hauteur au dessus du niveau de la mer. Sachant que la masse volumique de l'eau de mer à 0°C est $\rho_1=10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et celle de la glace $\rho_s=0,92.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$, calculer h/a en supposant que l'iceberg à 0°C flotte sur la mer à 0°C .

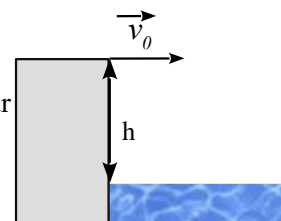
Rep.: $h/a = 0,08$

2. Chute d'une pierre ☺☺

Un enfant au bord d'une falaise surplombant la mer ramasse un cailloux et le lance d'une hauteur $h=20\text{m}$ avec une vitesse de $v_0=20\text{m.s}^{-1}$ horizontale.

Déterminer à quelle distance d de la falaise et à quelle vitesse v_1 le caillou tombe dans la mer.

On prendra $g=10\text{m.s}^{-2}$.



3. Mouvement d'une gouttelette d'eau de pluie (d'après ENAC 2019) ☺☺

Une gouttelette d'eau sphérique, de masse m et de diamètre D , tombe dans l'air en étant soumise à trois forces de direction verticale : son poids, la poussée d'Archimède \vec{F}_A et une force de frottement visqueux due à l'air $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$ où \vec{v} est la vitesse de la gouttelette dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et $\alpha = 3\pi\eta D$, η étant un paramètre caractéristique de l'air appelé viscosité. On précise qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette grandeur pour résoudre le problème posé. On note \vec{g} l'intensité de la pesanteur.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_e = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ et celle de l'air $\rho_0 = 1 \text{ kg.m}^{-3}$.

1. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI de η .

2. On néglige la poussée d'Archimède devant les deux autres forces. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse \vec{v} de la gouttelette s'écrit $\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \vec{g}$ et donner l'expression de la constante τ en fonction de m et α .

3. La poussée d'Archimède étant toujours négligée établir l'expression de $\vec{v}(t)$ en fonction de \vec{g} et τ , on supposera la vitesse initiale nulle. En déduire la bonne expression parmi les propositions suivantes :

A) $\vec{v}(t) = \vec{g} \tau$ B) $\vec{v}(t) = \vec{g} \tau \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ C) $\vec{v}(t) = \vec{g} \tau \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ D) $\vec{v}(t) = \vec{g} \tau \left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

4. On s'intéresse maintenant au vecteur position \vec{r} de la gouttelette. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, déterminer $\vec{r}(t)$, en fonction de \vec{g} et τ , sachant que la position initiale de la gouttelette est nulle.

5. Exprimer en fonction de D , η , ρ_e et g , la vitesse limite v_l de la goutte, puis calculer sa valeur approximative. On donne $D = 10 \mu\text{m}$; $\eta \approx 2 \times 10^{-5} \text{ SI}$ et $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

6. On s'intéresse désormais à l'influence de la poussée d'Archimède sur la valeur de v_l . Déterminer l'écart relatif $\frac{|v_{l,A} - v_l|}{v_{l,A}}$ en pourcentage, entre la vitesse limite $v_{l,A}$ obtenue en tenant compte de la poussée d'Archimède et la vitesse limite v_l obtenue en la négligeant.

4. Glissade sur un toboggan ☺☺

Un enfant de masse $m=20\text{kg}$ se laisse glisser sur le toboggan, modélisé ci-contre (le schéma n'est pas à l'échelle).

On néglige les frottements de l'air.

Le toboggan exerce sur l'enfant une réaction \vec{R} .

On note \vec{R}_T sa composante tangentielle et \vec{R}_N sa composante normale.

Les 2 composantes obéissent à la loi du frottement solide, c'est à dire que

lors du mouvement: $\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$ avec f une constante.

On pose $R_T = \|\vec{R}_T\|$ et $R_N = \|\vec{R}_N\|$.

L'enfant part à $t = 0$ en O avec la vitesse $v_0 = 0,5\text{m.s}^{-1}$.

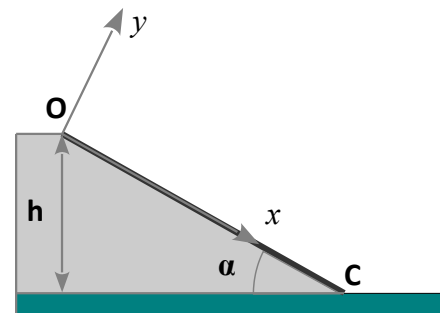
La hauteur de chute est $h = 3\text{m}$ et l'angle $\alpha = 45^\circ$.

1) Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant $x(t)$ en fonction de g, f, α et v_0 .

2) Le temps de parcours sur le toboggan entre O et C est $\tau = 1,2 \text{ s}$, en déduire f et la vitesse à laquelle l'enfant arrive en C.

3) Quelle serait la vitesse d'arrivée s'il n'y avait pas de frottements ?

Rep.: 2) $f = \tan \alpha + 2 \left(\frac{v_0 \tau - d}{\cos \alpha g \tau^2} \right)$



Dynamique en référentiel galiléen

(partie 2)

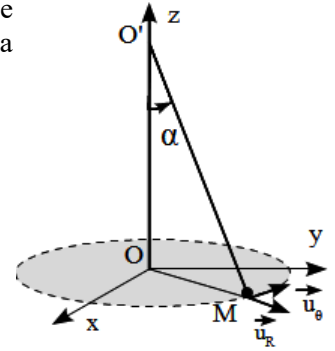
5. Pendule conique ☺☺☺

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil de longueur L inextensible et de masse négligeable attaché en un point fixe O' de l'axe Oz. M décrit un cercle de rayon R de centre O à la vitesse angulaire ω constante dans le plan Oxy (figure ci-contre).

En utilisant la base de projection $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

- a) Calculer la tension du fil.
- b) Calculer l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale. *Rep: $\cos\alpha = g/(L\omega^2)$.*
- c) A quelle condition sur ω ce mouvement peut-il avoir lieu ?

Rep: $T = L\omega^2 m$

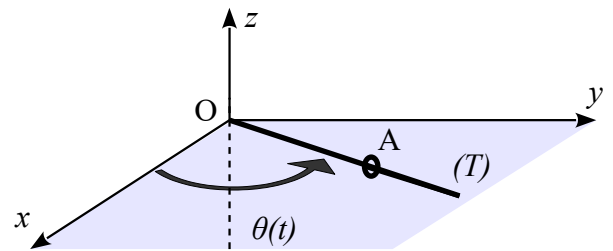


6. Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation ☺☺☺

Dans le référentiel $R(O, x, y, z)$ supposé galiléen une tige (T) de longueur L est soudée à l'axe vertical Oz en O comme l'indique la figure ci-contre.

Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour cet axe tout en restant dans le plan (O, x, y) horizontal.

Un anneau A de masse m enfilé sur la tige est abandonné sans vitesse initiale à la distance L/2 de l'axe, il glisse sans frottement sur la tige. On repère le point A grâce à ses coordonnées polaires (r, θ) .



- 1) Reproduire le schéma et représenter la base polaire.
- 2) Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau, exprimer leurs coordonnées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
- 3) En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau sur la tige.
- 4) Déterminer la durée τ au bout de laquelle l'anneau atteint l'extrémité de la tige.
- 5) Déterminer les composantes de la réaction \vec{R} de la tige sur l'anneau en fonction du temps.

Rep: 3) $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$; 2) $\tau = \frac{1}{\omega} \ln(2 + \sqrt{3})$