Dynamique en référentiel galiléen

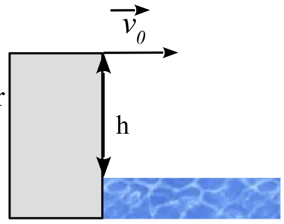
(partie 1)

1. La face cachée d'un iceberg ☺

On assimile un iceberg à un bloc de glace cubique d'arête a. On appelle h la hauteur au dessus du niveau de la mer.
Sachant que la masse volumique de l'eau de mer à 0°C est $\rho_l=10^3$ kgm^{-3} et celle de la glace $\rho_s=0{,}92.10^3$ kg.m^{-3}, calculer h/a en supposant que l'iceberg à 0°C flotte sur la mer à 0°C.

Rep : $h/a = 0{,}08$

2. Chute d'une pierre ☺☺



Un enfant au bord d'une falaise surplombant la mer ramasse un cailloux et le lance d'une hauteur h=20m avec une vitesse de $v_0 = 20 m.s^{-1}$ horizontale.

Déterminer à quelle distance d de la falaise et à quelle vitesse v_l le caillou tombe dans la mer .

On prendra g=10m.s^{-2}.

3. Mouvement d'une gouttelette d'eau de pluie *(d'après ENAC 2019)* ☺☺

Une gouttelette d'eau sphérique, de masse m et de diamètre D, tombe dans l'air en étant soumise à trois forces de direction verticale : son poids, la poussée d'Archimède $\vec{F_A}$ et une force de frottement visqueux due à l'air $\vec{F_f}=-\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la gouttelette dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et $\alpha=3\pi\eta D$, η étant un paramètre caractéristique de l'air appelé viscosité. On précise qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette grandeur pour résoudre le problème posé. On note $\vec{g}$ l'intensité de la pesanteur.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_e=1000\,kg.m^{-3}$ et celle de l'air $\rho_0=1\,kg.m^{-3}$.

1. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI de η .

2. On néglige la poussée d'Archimède devant les deux autres forces. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la gouttelette s'écrit $\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{\vec{v}}{\tau}=\vec{g}$ et donner l' expression de la constante τ en fonction de m et α .

3. La poussée d'Archimède étant toujours négligée établir l'expression de $\vec{v}(t)$ en fonction de $\vec{g}$ et τ , on supposera la vitesse initiale nulle. En déduire la bonne expression parmi les propositions suivantes :

A) $\vec{v}(t)=\vec{g}\,\tau$ **B)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\,\tau\left(1+\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ **C)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\,\tau\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ **D)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\,\tau\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

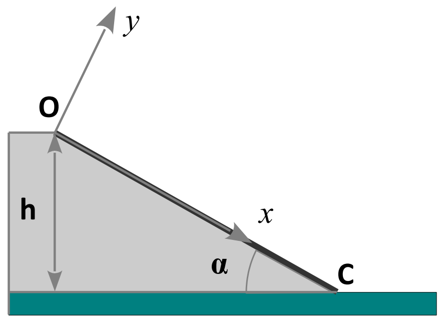
4. On s'intéresse maintenant au vecteur position $\vec{r}$ de la gouttelette. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, déterminer $\vec{r}(t)$, en fonction de $\vec{g}$ et τ , sachant que la position initiale de la gouttelette est nulle.

5. Exprimer en fonction de D, η , ρ_e et g, la vitesse limite v_l de la goutte, puis calculer sa valeur approximative. On donne $D=10\,\mu m$; $\eta\approx 2\times 10^{-5} SI$ et $g=10\,m.s^{-2}$.

6. On s'intéresse désormais à l'influence de la poussée d'Archimède sur la valeur de v_l. Déterminer l'écart relatif $\frac{|v_{l,A}-v_l|}{v_{l,A}}$ en pourcentage , entre la vitesse limite $v_{l,A}$ obtenue en tenant compte de la poussée d'Archimède et la vitesse limite v_l obtenue en la négligeant.

4. Glissade sur un toboggan ☺☺

Un enfant de masse m=20kg se laisse glisser sur le toboggan, modélisé ci-contre *(le schéma n'est pas à l'échelle)*.



On néglige les frottements de l'air.

Le toboggan exerce sur l'enfant une réaction $\vec{R}$.

On note $\vec{R_T}$ sa composante tangentielle et $\vec{R_N}$ sa composante normale.

Les 2 composantes obéissent à la loi du frottement solide , c'est à dire que lors du mouvement: $\|\vec{R_T}\|=f\,\|\vec{R_N}\|$ avec f une constante.

On pose $R_T=\|\vec{R_T}\|$ et $R_N=\|\vec{R_N}\|$.

L'enfant part à t = 0 en O avec la vitesse v_0= 0,5m.s^{-1}.

La hauteur de chute est h =3m et l'angle α = 45°.

1) Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant x(t) en fonction de $g, f\,\alpha$ *et* v_0 .

2) Le temps de parcours sur le toboggan entre O et C est τ = 1,2 s, en déduire f et la vitesse à laquelle l'enfant arrive en C.

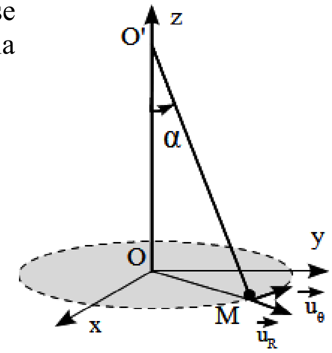
3) Quelle serait la vitesse d'arrivée s'il n'y avait pas de frottements ?

Rep :2) $f=\tan\alpha+2\left(\frac{v_0\tau-d}{\cos\alpha\, g\,\tau^2}\right)$

Dynamique en référentiel galiléen

(partie 2)

5. Pendule conique ☺☺☺



Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil de longueur L inextensible et de masse négligeable attaché en un point fixe O' de l'axe Oz. M décrit un cercle de rayon R de centre O à la vitesse angulaire ω constante dans le plan *Oxy (figure ci-contre)*.

En utilisant la base de projection $(\vec{u}_R, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$:

a) Calculer la tension du fil.

b) Calculer l'inclinaison α du fil par rapport à la verticale. *Rep: cosα=g/(Lω²)*.

c) A quelle condition sur ω ce mouvement peut-il avoir lieu ?

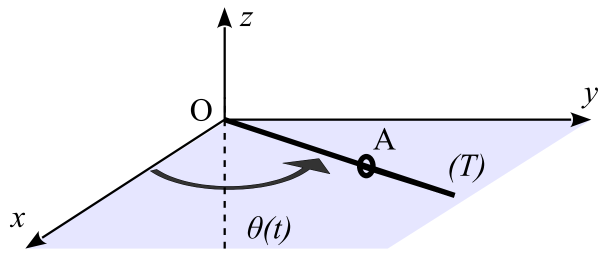
Rep: *T=Lω²m*

6. Mouvement d'un anneau sur une tige en rotation ☺☺☺

Dans le référentiel *R(O, x, y, z)* supposé galiléen une tige *(T)* de longueur L est soudée à l' axe vertical *Oz* en O comme l'indique la figure ci-contre.

Elle tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour cet axe tout en restant dans le plan *(O, x, y)* horizontal.

Un anneau A de masse m enfilé sur la tige est abandonné sans vitesse initiale à la distance L/2 de l'axe, il glisse sans frottement sur la tige. On repère le point A grâce à ses coordonnées polaires (r, θ).



1) Reproduire le schéma et représenter la base polaire.

2) Faire le bilan des forces s'exerçant sur l'anneau, exprimer leurs coordonnées dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

3) En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'anneau sur la tige.

4) Déterminer la durée τ au bout de laquelle l'anneau atteint l'extrémité de la tige.

5) Déterminer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur l'anneau en fonction du temps.

Rep:3) $\ddot{r}-\omega^2 r=0$; 2) $\tau=\frac{1}{\omega}\ln(2+\sqrt{3})$