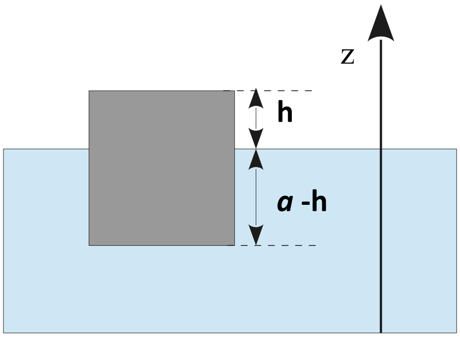
1. La face cachée d'un iceberg ☺

On assimile un iceberg à un bloc de glace cubique d'arête a.
On appelle h la hauteur au dessus du niveau de la mer. Sachant que la masse volumique de l'eau de mer à 0°C est $\rho_l=10^3$ kgm^{-3} et celle de la glace $\rho_s=0{,}92.10^3$ kg.m^{-3}, calculer h/a en supposant que l'iceberg à 0°C flotte sur la mer à 0°C. *Rep* : h/a = 0,08

Solution :

On exprime la condition d'équilibre du bloc de glace dans le référentiel terrestre :

$$\boxed{\sum \vec{F}_{ext}=\vec{\pi}_A+\vec{P}=\vec{0}}$$



$\vec{P}=-a^3\rho_s g\,\vec{u}_z \quad \vec{\pi}_A=a^2(a-h)\rho_l g\,\vec{u}_z$ d'où : $\boxed{\dfrac{h}{a}=1-\dfrac{\rho_s}{\rho_l}=0{,}08}$

2. Mouvement d'une gouttelette d'eau de pluie *(d'après ENAC 2019)*

Une gouttelette d'eau sphérique, de masse m et de diamètre D, tombe dans l'air en étant soumise à trois forces de direction verticale : son poids, la poussée d'Archimède $\vec{F}_A$ et une force de frottement visqueux due à l'air $\vec{F}_f=-\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de la gouttelette dans le référentiel terrestre supposé galiléen, et $\alpha=3\pi\eta D$, η étant un paramètre caractéristique de l'air appelé viscosité. On précise qu'il n'est pas nécessaire de connaître cette grandeur pour résoudre le problème posé. On note $\vec{g}$ l'intensité de la pesanteur.

On donne la masse volumique de l'eau $\rho_e=1000\,kg.m^{-3}$ et celle de l'air $\rho_0=1\,kg.m^{-3}$.

1. A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité SI de η .

2. On néglige la poussée d'Archimède devant les deux autres forces. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le vecteur vitesse $\vec{v}$ de la gouttelette s'écrit $\dfrac{d\vec{v}}{dt}+\dfrac{\vec{v}}{\tau}=\vec{g}$ et donner l' expression de la constante τ en fonction de m et α .

3. La poussée d'Archimède étant toujours négligée établir l'expression de $\vec{v}(t)$ en fonction de $\vec{g}$ et τ , on supposera la vitesse initiale nulle. En déduire la bonne expression parmi les propositions suivantes :

A) $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau$ **B)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(1+\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ **C)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$ **D)** $\vec{v}(t)=\vec{g}\tau\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$

4. On s'intéresse maintenant au vecteur position $\vec{r}$ de la goutelette. La poussée d'Archimède étant toujours négligée, déterminer $\vec{r}(t)$, en fonction de $\vec{g}$ et τ , sachant que la position initiale de la gouttelette est nulle.

5. Exprimer en fonction de D, η , ρ_e et g, la vitesse limite v_l de la goutte, puis calculer sa valeur approximative. On donne $D=10\,\mu m$; $\eta\approx 2\times10^{-5}\,SI$ et $g=10\,m.s^{-2}$.

6. On s'intéresse désormais à l'influence de la poussée d'Archimède sur la valeur de v_l. Déterminer l'écart relatif $\dfrac{|v_{l,A}-v_l|}{v_{l,A}}$ en pourcentage , entre la vitesse limite $v_{l,A}$ obtenue en tenant compte de la poussée d'Archimède et la vitesse limite v_l obtenue en la négligeant.

Solution

1.	Comme $\vec{F}=-3\pi\eta D\vec{v}$ alors $[F]=[MLT^{-2}]=[\eta][L][LT^{-1}]$ alors $[\eta]=\frac{[MLT^{-2}]}{[L][LT^{-1}]}=[ML^{-1}T^{-1}]$ $[\eta]$ est en $\boxed{kg.m^{-1}.s^{-1}}$.
2.	Le système est la masse m dans le référentiel terrestre galiléen. Les forces sont : Le poids, $m\vec{g}$, les frottements $\vec{F}_f=-\alpha\vec{v}$ La relation fondamentale donne $m\vec{a}=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{g}-\alpha\vec{v}$ $\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{g}-\frac{\alpha}{m}\vec{v}=\vec{g}-\frac{1}{\tau}\vec{v}$: $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}+\frac{1}{\tau}\vec{v}=\vec{g}}$ avec $\boxed{\tau=\frac{m}{\alpha}}$.
3.	Nous obtenons un régime transitoire du 1[er] ordre : $\boxed{\vec{v}=\tau\vec{g}\left(1-\exp(-t/\tau)\right)}$. Réponse : C
4.	On intègre $\boxed{\vec{r}=\int\vec{v}dt=\tau\vec{g}t-\tau^2\vec{g}\left(1-\exp(-t/\tau)\right)}$.
5.	En régime permanent, $\boxed{\vec{v}(t\to\infty)=\tau\vec{g}}$: $\boxed{v_\ell=\tau g=\frac{mg}{3\pi\eta D}=\frac{\rho_e 4gD^3}{8\times 9\eta D}=\frac{\rho_e gD^2}{18\eta}=\frac{1000\times10\times(10\times10^{-6})^2}{18\times2\times10^{-5}}=2,7mm/s}$
6.	Si on tient compte de la poussée d'Archimède $v_{\ell,A}=\frac{(\rho_e-\rho_0)gD^2}{18\eta}$ donc $v_{\ell,A}-v_\ell=\frac{(\rho_e-\rho_0)gD^2}{18\eta}-\frac{\rho_e gD^2}{18\eta}=\frac{-\rho_0 gD^2}{18\eta}$ et $\boxed{\frac{\lvert v_{\ell,A}-v_\ell\rvert}{v_{\ell,A}}=\frac{\rho_0}{\rho_e-\rho_0}=\frac{1}{999}\approx0,1\%}$

4. Glissade sur un Toboggan ☺☺

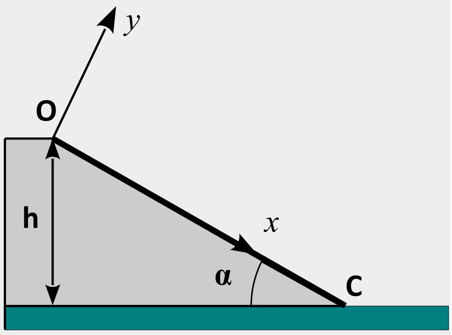
Un enfant de masse m=20kg se laisse glisser sur le toboggan, modélisé ci-contre *(le schéma n'est pas à l'échelle)*.

On néglige les frottements de l'air.

Le toboggan exerce sur l'enfant une réaction $\vec{R}$.

On note $\vec{R_T}$ sa composante tangentielle et $\vec{R_N}$ sa composante normale. Les 2 composantes obéissent à la loi du frottement solide, c'est à dire que lors du mouvement: $\|\vec{R_T}\|=f\,\|\vec{R_N}\|$ avec f une constante.

On pose $R_T=\|\vec{R_T}\|$ et $R_N=\|\vec{R_N}\|$.



L'enfant part à t = 0 en O avec la vitesse v_0= 0,5m.s^{-1}.

La hauteur de chute est h=3m et l'angle α = 45°.

1) Déterminer l'équation horaire du mouvement de l'enfant x(t) en fonction de $g, f\ \alpha$ *et* v_0.

2) Le temps de parcours sur le toboggan entre O et C est de 1,2 s, en déduire f et la vitesse à laquelle l'enfant arrive en C.

3) Quelle serait la vitesse d'arrivée s'il n'y avait pas de frottements ?

Solution

1. *Ref :* terrestre ;

Repère d'espace : $R(O,\vec{u_x},\vec{u_y})$, *Base de projection :* $(\vec{u_x},u_y)$, *Coordonnées* : cartésiennes

Vecteurs cinématiques : $\boldsymbol{\vec{OM}}=x\boldsymbol{\vec{u}_x}$, $\boldsymbol{\vec{v}}=\dot{x}\boldsymbol{\vec{u}_x}$, $\boldsymbol{\vec{a}}=\ddot{x}\boldsymbol{\vec{u}_x}$

Bilan des forces : *Poids :* $\vec{P}=m\vec{g}=mg\sin\alpha\vec{u_x}-mg\cos\alpha\vec{u_y}$, la réaction du support : $\vec{R}=-R_T\vec{u_x}+R_N\vec{u_y}$

2ème loi de Newton : $m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}$ d'où:

par projection sur l'axe Ox: $m\ddot{x}=mg\sin\alpha-R_T$ (1) et rar projection sur Oy: $0=-mg\cos\alpha+R_N$ (2)

De l'équation (2) on tire $R_N=mg\cos\alpha$ or $R_T=f\,R_N$ donc $R_T=f\,mg\cos\alpha$, en remplaçant dans l'équation (1) on obtient: $\boxed{\ddot{x}=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)}$.

Par intégration en tenant compte des conditions initiales on obtient: $\boxed{x(t)=\frac{1}{2}g(\sin\alpha-f\cos\alpha)t^2+v_0t}$

2. On pose $d=x(\tau)=\dfrac{h}{\sin\alpha}=h\sqrt{2}$ d'où $\boldsymbol{d=\dfrac{1}{2}g(\sin\alpha-f\cos\alpha)\tau^2+v_0\tau}$ de cette expression on tire :

$$\boxed{f=\tan\alpha+2\left(\frac{v_0\tau-d}{\cos\alpha\, g\,\tau^2}\right)}.$$

__Application numérique :__ $f=1+2\sqrt{2}\left(\dfrac{0{,}5\times1{,}2-3\sqrt{2}}{10\times1{,}2^2}\right)$ d'où $\boxed{f=0{,}285\,SI}$.

La vitesse correspondante est : $v(\tau)=g(\sin\alpha-f\cos\alpha)\tau+v_0=10\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{0{,}285}{\sqrt{2}}\right)\times1{,}2+0{,}5=6{,}6\,m.s^{-1}$

3. Il n'y a pas de frottement. On applique le théorème de l'énergie cinétique à l'enfant entre les points O et C $E_C(C)-E_C(O)=W_{\vec{P}}+W_{\vec{R}}$. $W_{\vec{P}}=mgh$ et $W_{\vec{R}}=0$ car $\vec{R}\perp\vec{dl}$

d'où $\dfrac{1}{2}mv_C^2=mgh+\dfrac{1}{2}mv_0^2$ d'où $\boxed{v_C=\sqrt{2gh+v_0}}$ d'où $\boxed{v_C=7{,}8\,m.s^{-1}}$